1.1-1.4. Волновое уравнение и его решение в виде бегущей волны. Параметры волнового процесса (длина волны, волновое число, частота, период, фазовая (к-ть) и соотношения между ними. Продольная и поперечная волна. Волновой фронт. Плоская, цилиндрическая, сферическая волны.

Звук - волна сжатия, растяжения в упругой среде

Волна - любое различимое возмущение (сигнал), переносимое из одной точки пространства в другую.

Бегущие волны - волны, распространяющиеся в неограниченной среде, где нет отражения

Электромагнитные волны распространяются и в среде, и в вакууме, а звук только в упругой среде.

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} - c_0 \cdot \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1) \quad \text{- волновое уравнение}$$

$\xi(x,t)$ - возмущение волны. ; c_0 - волновая (фазовая) скорость (с которой перемещаются плоскости одинаковой фазы)

$$\{x,t\} \to \{\alpha = x - c_0 t,\ \beta = x + c_0 t\}$$

$$\xi(x,t) \to \xi(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(\alpha,\beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad \text{- уравнение гиперболического типа}$$

$$\xi(\alpha,\beta) = f(\alpha) + g(\beta) \quad \text{- общий вид}$$

$$\Updownarrow$$

$$\xi(x,t) = F(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

$F(x - c_0 t)$ — прямая волна ~~~>; $g(x + c_0 t)$ — обратная волна <~~~

$$x_1, t_1 \to \alpha_1 = x_1 - c_0 t_1 \to f(\alpha_1)$$

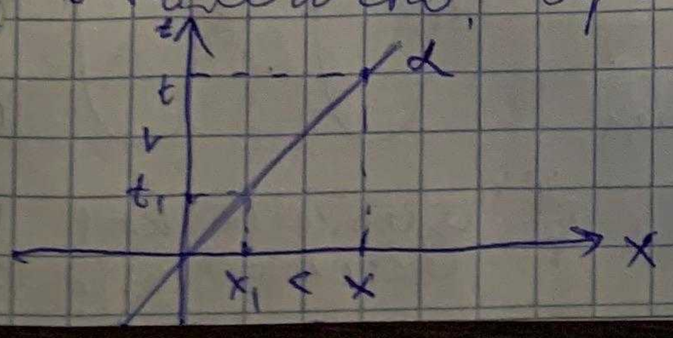
$\exists\ x > x_1$. В какой момент $t \geq t_1$ $\alpha = x - c_0 t = \alpha_1$

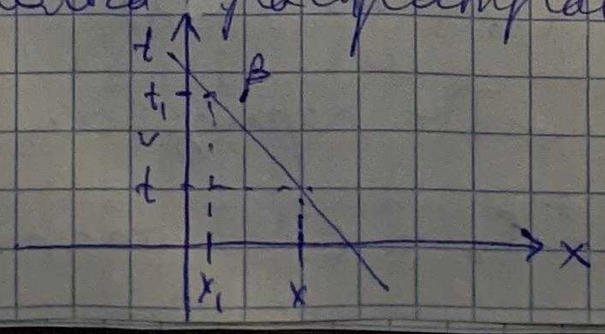
$$x - c_0 t = x_1 - c_0 t_1$$

$$t = t_1 + \frac{x - x_1}{c_0} \Rightarrow \text{т.к. } x > x_1, \text{ то } t > t_1 \Rightarrow$$

возмущение позже т.е волна бежит вправо

Аналогично, обратная волна распространяется влево.





$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \cdot \xi(x,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) = \xi(x,t) = 0$$

$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \xi(x,t) = 0$ - ур-е описывает волну бегущую вправо)

- ур-е переноса возмущений в волне бегущей вправо

②

$\xi(x,t) \sim \cos\varphi(x,t)$

Аргумент $x - c_0 t$ ф-ии $y = f(x - c_0 t)$ имеет размерность длины

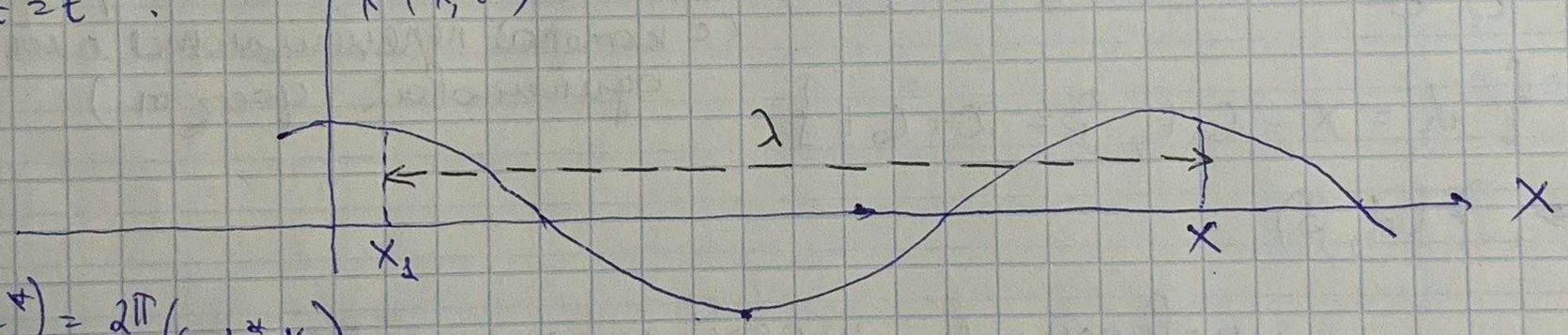
Для того, чтобы эта ф-я могла быть косинусом, её аргумент должен иметь размерность угла и измеряться в радианах. $\Rightarrow$ $x - c_0 t$ надо умножить на $\frac{2\pi}{\lambda}$

$$\varphi(x,t) = \frac{x - c_0 t}{\text{масштаб} \to \lambda} \cdot \frac{2\pi}{\text{периодичность}} \cdot (-1) = \frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t - x)$$

↖ для удобства

$\xi(x,t) = a \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t - x)$ - гармоническая волна, бегущая вправо

Зафикс $t = t^*$:



$x_1 \to \varphi(x_1, t^*) = \frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t^* - x_1)$

- В какой точке x аргумент косинуса будет изменяться на 2π?

$x > x_1$: $\varphi(x, t^*) = \varphi(x_1, t^*) + 2\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t^* - x) = \frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t^* - x_1) + 2\pi$$

$x - x_1 = \lambda$ - длина волны $[\lambda] = M$

т.е. расстояние между 2 ближайшими точками, в которых возмущение совпадает по величине

- кратчайшее расстояние при котором фаза изменяется на 2π

- Как изменяется во времени возмущение гармонической волны?

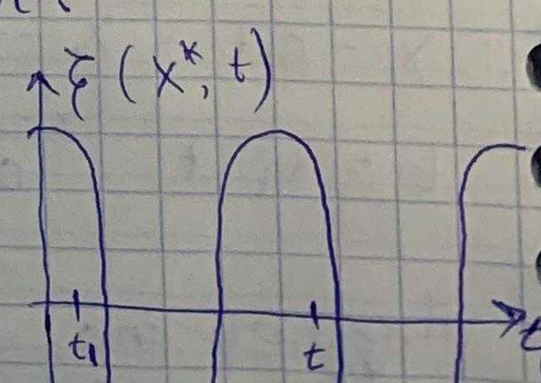
t_1: $\varphi(x^*, t_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t_1 - x^*)$

t - ? : $\varphi(x^*, t) = \varphi(x^*, t_1) + 2\pi$

$t > t_1$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t - x^*) = \frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t_1 - x^*) + 2\pi$$

$t - t_1 = \frac{\lambda}{c_0} = T$ - период осцилляции



$[T] = c$; $\nu = \frac{1}{T}$ $[\nu] = \Gamma_{\text{ц}} = c^{-1}$ - частота; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - циклическая частота: $[\omega] = \frac{\text{рад}}{c}$

$$\xi(x,t) = a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(c_0 t - x)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{\lambda} c_0 \quad ; \quad \frac{2\pi}{\lambda} = k \text{ - волновое число } [k] = м^{-1}$$

$$\omega = k c_0 \quad ; \quad c_0 = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda$$

$$\xi(x,t) = a\cos(\omega t - kx)$$

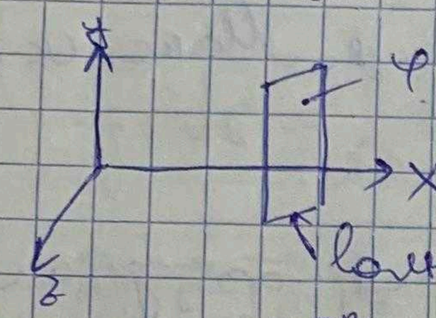
$$\xi(x,t) = a\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

← начальная фаза

$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\left(a\exp\{i\cdot(\omega t - k\varphi + \varphi_0)\}\right)$$

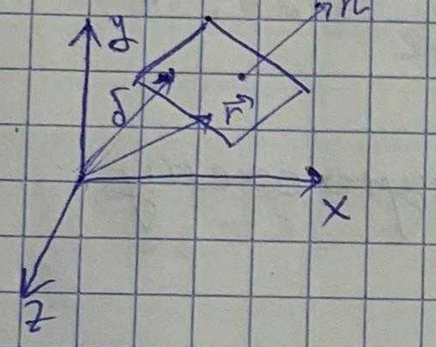
③ (плоская, сферическая, цилиндрическая волны)

Плоская волна - волна, фронт которой плоский.



$\varphi = const$ → плоская волна (бежит вдоль оси Ox)

Волновой фронт - поверхность равных значений фазы φ в некоторый момент $t = t^*$.



δ - кратчайшее расстояние от $(0,0)$ до плоскости

$$\xi(x,t) = a\cdot\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\xi(r,t) = a\cos(\omega t - k\delta - \varphi_0)$$

$$\delta = (\vec{r}, \vec{n})$$

$$\xi(\vec{r},t) = a\cdot\cos(\omega t - (k\vec{n}, \vec{r}) + \varphi_0)$$

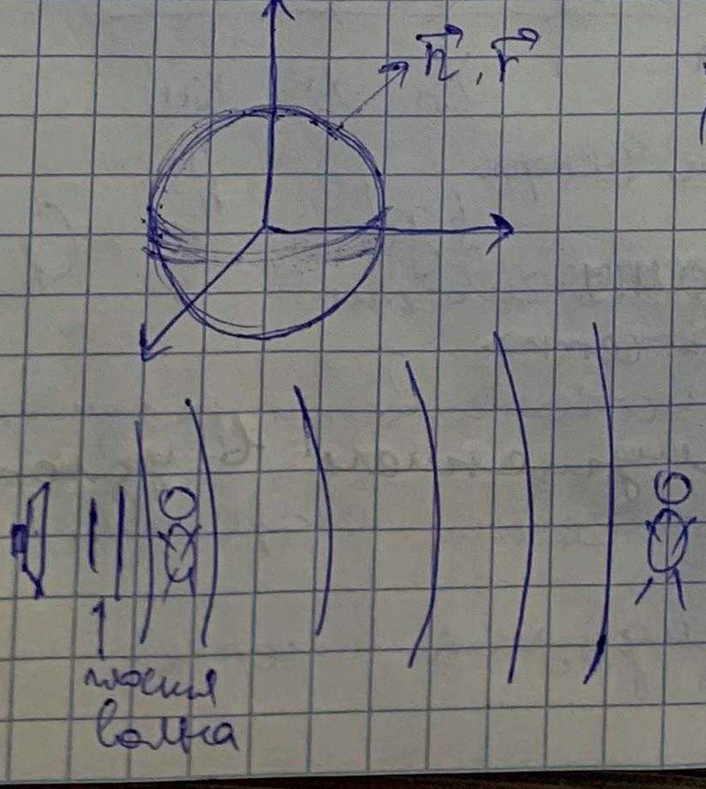
$\vec{k} = k\cdot\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ - волновой вектор

$$\xi(\vec{r},t) = a\cdot e^{i(\omega t - (\vec{k},\vec{r}) + \varphi_0)}$$ - плоская волна

$$\frac{\partial^2 \xi(\vec{r},t)}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta\xi(\vec{r},t) = 0$$ - волновое ур-е плоской волны в пр-ве

Сферическая симметричная волна

$$\frac{\partial^2 \xi(r,t)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \xi(r,t)}{\partial r}\right) = 0$$ волновой фронт - сфера



$$\xi(r,t) = u(r,t)\cdot\frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

$$\xi(r,t) = \left(\frac{a}{r}\right) e^{i\cdot(\omega t - kr + \varphi_0)}$$

↳ амплитуда убывает с расстоянием



$$\frac{\partial^2 \xi(r,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \xi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\xi(r,t) = \frac{a}{\sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr + \varphi_0)}$$ - цилиндрическая волна

волновая фронт цилиндр

(4) (продольная / поперечная волна)

$\vec{\xi} \uparrow\uparrow \vec{k}$ - продольная (статистическое натяжение например) (звуковая)

$\vec{\xi} \perp \vec{k}$ - поперечная (струна, электромагнитная волна)

1.5 Понятие волны. Физическая интерпретация условия устойчивости разностных схем бегущего счета для волнового уравнения. Макс. ск-ть переноса возмущений по сетке

Волна - различимое возмущение, которое передается от одной части пространства к другой

Аппроксимируем волновой оператор используя простейшую схему бегущего счета!

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

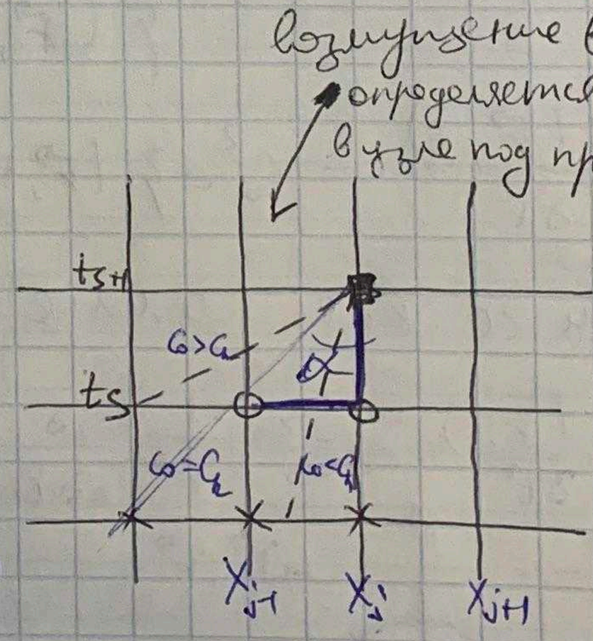
$\{x, t\} \to \{x_j = h \cdot j,\ t_s = \tau \cdot s\}$ - переход к дискретным переменным

(с шагом h по переменной x и с шагом τ по переменной t)

$$\xi(x,t) \to \xi_j^s$$

Тогда разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный имеет вид:

$$\frac{1}{\tau}\left(\xi_j^{s+1} - \xi_j^s\right) + c_0 \frac{1}{h}\left(\xi_j^s - \xi_{j-1}^s\right) = 0$$



Условие устойчивости: $\tau \le \frac{h}{c_0}$ - условие Куранта

Видно того, что $\frac{h}{\tau}$ имеет размерность ск-ти и может быть истерп. как ск-ть передачи информации по сетке (сеточная ск-ть), условие устойчивости может быть дано в следующей формулировке: Для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы ск-ть сетки была больше физической скорости:

$$c_0 \le \frac{h}{\tau} \Leftrightarrow c_0 \le c_k \leftarrow$$ макс. скорость переноса возмущений по сетке

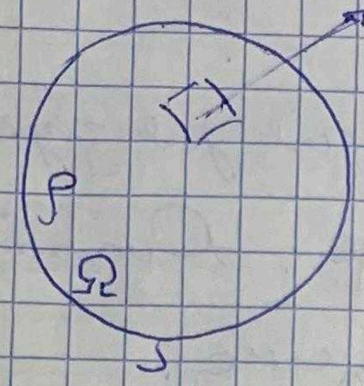
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\tau} = c_k$$

2.1 Система уравнений гидродинамики, граничные условия. Волна сжатия растяжения в стержне. Приближение сплошной среды

Велик по сравнению с расстоянием между частицами

$r_0 \ll \Omega \ll \lambda$ мал по сравнению с длиной волны

Рассмотрим сплошную среду.



В жидкости выделим объем Ω, ограниченный пов-ю S

В нем находится вещество, обладающее плотностью ρ

Тогда $m = \int_\Omega \rho \, d\Omega$, т. Закон сохр. массы $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$

Получим уравнение неразрывности!

$$1.\ \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = -\oint_S \rho \vec{V}_n \, d\vec{\sigma}$$

, где $\vec{V}_n$ - ск-ть потока по нормали к поверхности S

↖ поток вещества через границу

$$\left[\begin{array}{l} \oint_S f \, d\vec{\sigma} = \int_\Omega \vec{\nabla} f \, d\Omega \\ \oint_S (\vec{f}, d\vec{\sigma}) = \int_\Omega (\vec{\nabla}, \vec{f}) \, d\Omega \end{array} \right.$$

$\vec{\nabla}\vec{f} = \operatorname{div}\vec{f}$

$\left(\int_S v_n \, dS = \int_V \operatorname{div}\vec{v} \, dV \right)$

- формула Остроградского - интеграл от дивергенции векторного поля f, распространенный по объему Ω равен потоку вектора через поверхность S

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = -\int_\Omega \nabla(\rho\vec{v}) \, d\Omega$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. интеграл от некоторой величины по } \Omega = 0 \\ \text{то и сама эта величина равна } = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

1* Ур-е неразрывности в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = 0$$

(закон сохранения вещества)

2. Уравнение движения (импульса)

с другой стороны вектор давит

импульс меняется за счет давления

$$\int_\Omega \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\Omega = -\oint_S p \, d\vec{\sigma}$$

- т.е производная по времени количества движения объема V сплошной среды равняется сумме поверхностных сил действующих на среду.

$$\int \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\Omega = -\int_\Omega \vec{\nabla} p \, d\Omega$$

, p - давление

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt}(r,t) + \vec{\nabla} p(r,t) = 0$$

диф. форма уравнения движения 2-й Закон Ньютона

3. Уравнение состояния (связь между давлением температурой и плотностью)

$F(\rho, p, T) = 0$, заданное как неявная функция

$\Phi(\rho, p) = 0$, $p = p(\rho)$ - описывает упругость среды

4. Закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{V^2}{2} + \varepsilon \frac{p^2}{2}\right) = -(\vec{\nabla}, (p\vec{v} + \vec{\varkappa}))$$

Энергия жидкости складывается из внутренней и кинетической энергии!

$$U = \int_V \left(\frac{\rho\vec{V}^2}{2} + \rho\varepsilon\right) dV$$

Граничные условия

Абсолютно жесткая граница: $V_n = 0$ (граница непроницаема для жидкости, пелены нет)

Абсолютно мягкая граница: $p = 0$

Сплошная среда - в любом бесконечно малом объеме содержится достаточно много частиц

2.2 Приближение линейной акустики. Вывод уравнения для звуковых волн. Потенциал скорости. Скорость звука в воздухе и воде. Диапазон звуковых частот. Ультразвук и его применение в медицине.

Рассмотрим малые возмущения в среде. Запишем

$\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$; ρ_0, p_0 - давление и плотность в равновесной неподвижной среде

Штрихами обозначены добавки, возникающие при распространении звука

Полагаем ск-ть среды малой ($V_0 = 0$) $\Rightarrow$ возникшее звуком изменение плотности и давления также должно быть малы: $\frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1$, $\frac{p'}{p_0} \ll 1$

1. Уравнение движения.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\nabla} p = 0$$

$$(\rho_0 + \rho') \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \vec{\nabla} (p_0 + p') = 0$$

локальное ускорение: $W_{лок} \sim \frac{V}{T}$

конвективное: $W_{конв} \sim \frac{V}{\lambda} \cdot V$

{ Изменение ск-ти dV макроскопически как состоящее из 2-х: локального, происходящего из-за изменения ск-ти в данной точке вследствие нестационарности поля и конвективного, являющегося следствием неоднородности поля скоростей }

$$\frac{W_{конв}}{W_{лок}} = \frac{V^2}{\lambda} : \frac{V}{T} = \left\{ \begin{array}{l} a/\lambda \\ V/c_0 = M - \text{число Маха} \end{array} \right\} \ll 1 \quad (\text{смещение частиц} \ll \text{длины волны})$$

$\Rightarrow$ конвективное не учитываем

1') $\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' = 0$

2') $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\vec{\nabla}, \rho_0 \vec{V}) = 0$ ← ур-е неразрывности

3) $\rho_0 + p' = p(\rho)$ ← ур-е состояния

$p_0 + p' = p(\rho_0) + \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{\rho_0} \cdot \rho'$ $\Rightarrow$ $p' = \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{\rho_0} \cdot \rho'$ - ?

(p_0 = ρ_0; Тейлор)

• Волновое уравнение:

• Действуем ∇ на 1'):

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}, \vec{V}) + \Delta p' = 0$$

• Берем производную по времени в 2')

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}, \vec{V}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0$$

• Переобозначаем в 3')

$$p' = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} \cdot \rho' = c_0^2 \cdot \rho'$$

• Получаем волновое ур-е для пл-ти:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = 0 \qquad \left(\text{Аналогично } \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p' = 0\right)$$

• Потенциал скорости

$$\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}, t)$$

Первое уравнение:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' = 0$$

↓ в силу несущественности конвективного ускорения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial p'}{\partial t} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c_0^2 \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c_0^2 (-\rho_0 \Delta \varphi) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = 0$$ - волновое ур-е с потенциалом

c_0 - фазовая ск-ть волны

Второе уравнение:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0$$

Скорость звука:

Сжимаемость среды $\beta = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial p}\Big|_{\rho_0}$ ← свойство вещества изменять свой объем под действием давления

$\Rightarrow C_0^2 = \frac{1}{\rho_0 \beta}$; $\beta \downarrow \Rightarrow C_0 \uparrow$

$C_{сталь} \sim 7 \cdot 10^3$ м/с ; $C_{вода} \sim 1.5 \cdot 10^3$ м/с.

Воздух: Считаем, что процесс адиабатический (без теплообмена с внешней средой)

$C_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{\rho_0}$ $\quad pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ - ур-е адиабаты

$M = \rho V$ - const

$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \Rightarrow p(\rho) = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \cdot \rho^\gamma$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ← показатель адиабаты

- теплоемкость при пост. давл.
- теплоемкость при постоянном V

$C_p = C_v + R$

$C_v = i\frac{R}{2} \Rightarrow C_p = R \cdot (1 + \frac{i}{2}) \Rightarrow \gamma = \frac{(5_2 + 1)R}{5\frac{R}{2}} = \frac{7}{5} = 1,4$

$C_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^\gamma)\Big|_{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \gamma \rho_0^{\gamma-1} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = 1.4 \cdot \frac{1,01 \cdot 10^5 Па}{1.3 \cdot 10^3 кг/м^3} \Rightarrow C_0 = 331$ м/с

$Па = \frac{Н}{м^2} = \frac{кг \cdot \frac{м}{с}}{м^2} \Rightarrow C_0 = 300$ м/с

Длина волны:

$\lambda = C_0 \cdot T$; $T = \frac{1}{\nu}$; $[\nu] = Гц$ (для УЗ частота от 1 до 20 МГц)

$\lambda = \frac{C_0}{\nu}$

$\nu_{мин} = 20$ Гц ; $\nu_{макс} = 20$ кГц $\Rightarrow \lambda_{max} = \frac{3 \cdot 10^2}{20\frac{1}{с}} = 15$ м; $\lambda_{min} = \frac{3 \cdot 10^2}{20 \cdot 10^3} = 1,5$ см

Инфразвук $\nu < 15$ Гц

Ультразвук $\nu > 20$ кГц

Медицина: $\nu \approx 10^6$ Гц $= 1$ МГц

$\lambda_{мед} = C/\nu = 1.5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 1.5$ мм

2.3 Условия на границе раздела для акустических волн. Импеданс среды. Коэффициенты отражения и прохождения. Отражение с потерей полуволны

Плоская гармоническая волна распространяется вдоль оси Ox вправо:

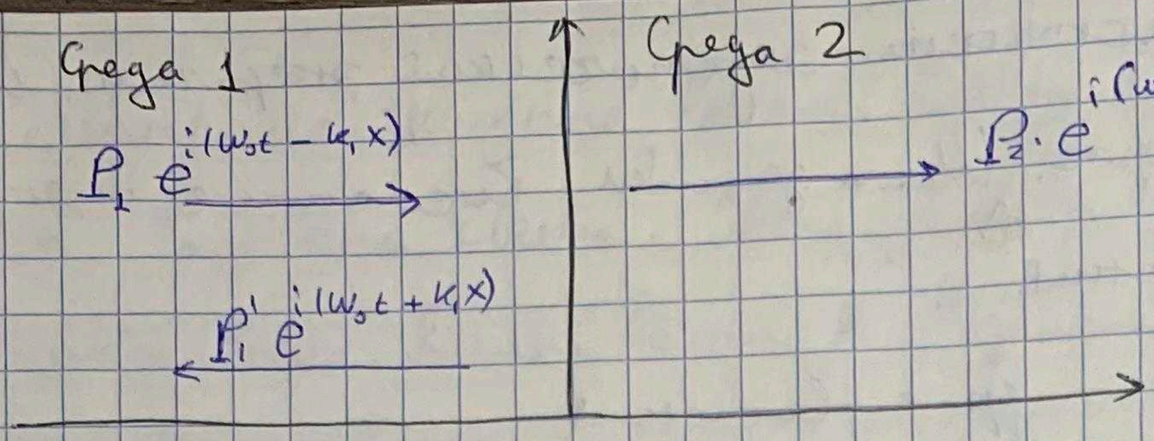
$\rho_0 \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = 0$

$V(x,t) = V \cdot \exp\{i \cdot (\omega_0 t - kx)\}$; $p(x,t) = P \cdot \exp\{i(\omega_0 t - kx)\}$

$\rho_0 \cdot i \cdot \omega_0 \cdot \underbrace{V}_{V} \cdot \underbrace{e^{i(\omega_0 t - kx)}}_{} - ik \underbrace{P \cdot e^{i(\omega_0 t - kx)}}_{p} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{\rho_0 \cdot \omega_0}{k} V = \rho_0 \cdot C_0 V$

$z = \rho_0 \cdot C_0$ - импеданс (волновое сопротивление) (характеризует свойство среды проводить акустическую энергию)

$p = z \cdot V$



$$P_1\big|_{x=-0} = P_2\big|_{x=+0}$$

$$V_1\big|_{x=-0} = V_2\big|_{x=+0}$$

отсутствие разрыва

$$P_1 e^{i(\omega t - k_1 x)}\big|_{x=0} + P_1' e^{i(\omega t - k_1 x)}\big|_{x=0} = P_2 e^{i(\omega t - k_2 x)}\big|_{x=0}$$ (расписали 1-е уре)

$$P_1 + P_1' = P_2$$

$$V_1 + V_1' = V_2$$ (аналогично давлению

$$\rho_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0 \iff \rho_0 \cdot i\omega V_1 - ik_1 P_1 = 0$$

Дифференциал: $Z_1 \cdot V_1 = P_1$; где $Z_1 = \rho_1 c_1$

$$\rho_0 \frac{\partial V_1'}{\partial t} + \frac{\partial P_1'}{\partial x} = 0 \iff \rho_0 \cdot i\omega V_1' + ik_1 P_1' = 0$$

$$Z_1 \cdot V_1' = -P_1'$$

$$\begin{cases} -\frac{P_1}{Z_1} + \frac{P_1'}{Z_1} = -\frac{P_2}{Z_2} \\ P_1 + P_1' = P_2 \end{cases}$$

$R_P = \frac{P_1'}{P_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$ – коэф. отражения.

$T_P = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$ – коэф. прохождения

Аналогично!

$R_V = \frac{V_1'}{V_1} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1}$

$T_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

Если $Z_2 < Z_1$, то $R_P < 0$ $Z_1 = Z_2 \Rightarrow$ отражения нет

Предел $Z_2 = 0$: $R_P < 0$, $T_P = 0$ – полностью отражается

Если $Z_2 > Z_1$, т.е если 2 среда акустически более "жесткая" то $R_V < 0$. Это значит что скорость частиц при отражении претерпевает изменение фазы на π или отраженная волна имеет обратную фазу по сравнению с падающей. Фаза P не изменяется.

Если $Z_2 < Z_1$, то 2 среда акустически более "мягкая", то фаза скорости частиц при отражении остается без изменения, в то время как давление меняет свою фазу на π

2.4-25 Поток и объемная плотность акустической энергии. Интенсивность. Порог слышимости. Болевой порог. Шкала децибел. Численные оценки для смещения, скорости, давления.

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 & \times \vec{V} \text{ - ур-е движения} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\vec{\nabla}, \vec{V}) = 0 & \times \frac{1}{\rho_0} p \text{ - ур-е неразрывности} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_0 (\vec{V}, \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}) + (\vec{V}, \vec{\nabla} p) = 0 \\ \underbrace{\frac{1}{\rho_0} p \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} p} + p (\vec{\nabla}, \vec{V}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(V^2) + (\vec{V}, \vec{\nabla} p) = 0 \\ \frac{1}{2} \beta \frac{\partial}{\partial t}(p^2) + p (\vec{\nabla}, \vec{V}) = 0 \end{cases}$$

β

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{\beta p^2}{2} \right)}_{w} + (\vec{\nabla}, \underbrace{(p\vec{V})}_{\vec{S}}) = 0 \quad \text{(З-н сохр. энергии)}$$

Объемная плотность энергии:

$$w = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{\beta p^2}{2} \qquad [w] = \frac{Дж}{м^3}$$

$$w = \frac{\rho_0 V^2}{2} + \frac{1}{c_0^2 \rho_0} \cdot (\rho_0 c_0 V)^2 = \rho_0 V^2 = \beta p^2$$

$$z = \rho_0 \cdot c_0$$

$$p = zV = \rho_0 c_0 V$$

$$V = \frac{p}{\rho_0 c_0}$$

Плотность потока энергии:

$$\vec{S} = p\vec{V} \qquad [S] = \frac{Вт}{м^2}$$

$$|\vec{S}| = pV = zV^2 = \rho_0 \cdot c_0 V^2 = cw$$ - энергия переносимая со ск-тью c_0 в пр-ве

Интенсивность звука:

$$I = \langle S \rangle_t, \qquad [I] = Вт/м^2$$

из экспоненты ($Re\ or\ e^{i(\omega t - kx)}$, $\uparrow$ фазы, гк. усреднен по t.)

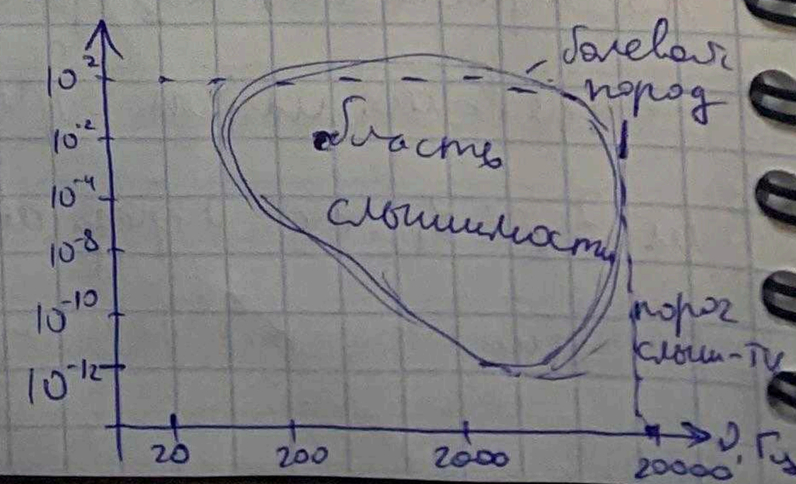
$$I = \langle \rho_0 c_0 V^2 \rangle_t = \rho_0 c_0 \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T V^2 \cos^2 \omega_0 t \, dt}_{V^2 \cdot \frac{T}{2}} = \frac{\rho_0 c_0 V^2}{2}$$

Порог слышимости $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2 (на этих частотах)

Слух человека имеет наиболее высокую чувствительность на частотах $\nu = 2 \cdot 3$ кГц

Интенсивность измеряется также в дБ; $\beta_{инт} = 10 \lg \frac{I}{I_0}$, $[\beta_{инт}] =$ дБ ← ин-ть на пороге слышимости

Болевой порог наступает в указанном частотном диапазоне при интенсивности, равной $I_{бол} = 10^{14} I_0$, то есть при $A = 140$ дБ



3.1, 3.5 Электромагнитные волны. Вывод волнового уравнения из ур. Максвелла. Скорость света. Показатель преломления. Шкала электромагнитных волн. Длина волны в видимой части спектра и в диапазоне сотовой связи.

j - плотность эл. тока
ρ - объемная плотность свободного заряда
$\vec{B}$ - вектор м.и., $\vec{D}$ - вектор э.и.
$\vec{H}$ - магн. напр., $\vec{E}$ - электр. напр.

Уравнения Максвелла

$div\,\vec{B} = 0$ - не существует магнитных зарядов

$div\,\vec{D} = \rho$ - электрический заряд является источником эл. индукции

$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - электрический ток и изменение эл. индукции порождают вихревое магнитное поле. ($\vec{D}$ - ток смещения)

$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - Закон ЭМИ - изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле

Индукционный ток всегда направлен так, чтобы действие противоположно действию ← Правило Ленца причины его порождающей

Рассмотрим диэлектрик.

материальное уравнение: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, ε - диэлектрическая проницаемость среды

$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, μ - магнитная проницаемость среды

Материальную среду характеризуем ε, μ

При этом $\rho = 0$ и $j = 0$ (нет свободных зарядов и токов)

$$rot(rot\,\vec{E}) = rot\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$grad\,div\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = rot\left(-\frac{\partial(\mu\mu_0\vec{H})}{\partial t}\right) = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(rot\,\vec{H}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

($grad\,div\,\vec{E} = 0$; $rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$)

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

волновое уравнение: $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$, где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$ - скорость распространения эм-волны с ε и μ

$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 300\,000$ - скорость света в вакууме

Если $\varepsilon > 1$, $\mu > 1 \Rightarrow$ в среде скорость света меньше, чем в вакууме

$c = \frac{c_0}{n}$, n - коэф. кратности (во сколько раз медленнее в среде, чем в вакууме), $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ (преломления)

Шкала эм-волн

γ-излучение	Рентген	УФ	Оптический диапазон	ИК	Микро(УКВ) локация, системы	Радио TV	
10^{-13}		10^{-8}		10^{-3}	10^{0}	10^{4}	λм

γ-излучение: испускается в процессах перехода атомных ядер из возбужденного состояния в основное

Рентген: лучи испускаются при участии электронов (свободных либо связанных в атоме)

Оптический диапазон: 0.38 - 0.76 мкм, самый узкий в спектре

Микро(УКВ) локация, системы: GSM = 880 - 960 МГц, 1710 МГц, 2300 МГц

Радио TV: 3G ~ 2 ГГц, 4G ~ 2.6 ГГц

3.2 Поперечность электромагнитной волны в свободном пространстве, как следствие уравнений Максвелла (вывод). Ориентация векторов $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$

Рассмотрим плоскую эм волну:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad ; \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$div\,\vec{D} = \rho = 0 \Rightarrow \quad div\,\vec{E} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla}, \vec{E}(\vec{r},t)) = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla}, e^{-i\vec{k}\vec{r}}) \cdot E_0 \cdot e^{i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -i(\vec{k}, \vec{E}) = 0 \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{E}$$

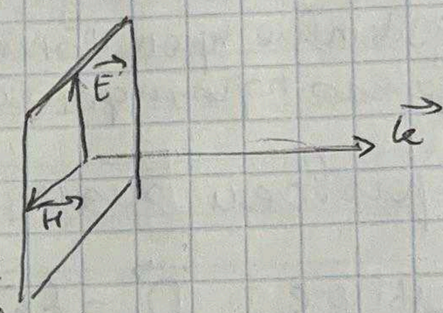
$$div\,\vec{B} = 0 \Rightarrow (\vec{k}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{H}$$

$\Rightarrow$ эм волна поперечная (возмущение происходит $\perp$ направлению распространения волны)

$$\text{Из} \quad [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \quad -i[\vec{k}, \vec{E}] = -\mu\mu_0 i\omega \vec{H} \Rightarrow [\vec{k}, \vec{E}] = \mu\mu_0 \omega \vec{H}$$

$$\text{Из} \quad [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \quad -i[\vec{k}, \vec{H}] = -i\omega\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow [\vec{k}, \vec{H}] = -\omega\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ – образуют правую тройку



Заметка:

Ур-я Максвелла: $div\,\vec{B} = 0$ – не существуют магнитных зарядов.

$div\,\vec{D} = \rho$ эл. заряд является источником эл. индукции.

$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – эл. ток и изменение эл. индукции порождают вихревое магнитное поле

$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ – изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле

Рассматриваем диэлектрик. При этом $\rho = 0$ и $j = 0$ (нет свободных зарядов и токов)

3.3-3.6 Энергия электромагнитной волны. Уравнения Максвелла. Плотность потока энергии, объемная плотность энергии. Интенсивность излучения. Солнечная постоянная. Энергетический баланс солнечного излучения в атмосфере. Климат Земли. Парниковый эффект

Рассмотрим вектор $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ – вектор У.-П.

$$[S] = \frac{В}{м} \cdot \frac{А}{м} = \frac{Вт}{м^2} = \frac{Дж}{с \cdot м^2} \Rightarrow$$ поток энергии – какое количество энергии переносит волна за 1 с. через площадку

$$div\,\vec{S} = div\,[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H}\,rot\,\vec{E} - \vec{E} \cdot rot\,\vec{H} = \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} =$$

$$= \mu\mu_0 \vec{H} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) - \varepsilon\varepsilon_0 E \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}^2) - \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}^2) = -\frac{\partial w}{\partial t},$$

где $w = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \vec{H}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{E^2}{Z^2} + \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$

$$[w] = \frac{А \cdot с}{В \cdot м} \cdot \frac{В^2}{м^2} = \frac{Вт \cdot с}{м^3} = \frac{Дж}{с\,м^3} = \frac{Дж}{м^3}$$ – объемная плотность энергии

$$\operatorname{div}\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

$$\int_V \operatorname{div}\vec{S}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV = 0$$

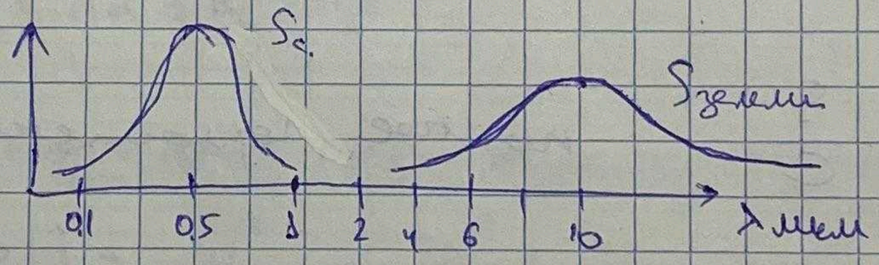
$$\underbrace{\oint_S \vec{S}\,d\vec{\sigma}}_{\text{поток энергии через поверхность}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}}_{\text{излучение энергии}} = 0$$

$$S = EH = \frac{E^2}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2 = C\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = cw$$

Интенсивность волны: $I = \langle S \rangle_t = c\varepsilon\varepsilon_0\langle E^2\rangle_t = \frac{1}{2}c\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$

$[I] = \frac{Вт}{м^2}$.

- $S_c = 1{,}35$ кВт/м² (плотность потока энергии, падающей на верхние слои атмосферы)
- Все излучение от Солнца излучается Землей обратно в космос (иначе планета бы перегрелась.
- Спектр солнечного излучения является „коротковолновым" с максимальной интенсивностью на $\lambda = 0{,}5$ мкм. А спектр земного излучения имеет max I при $\lambda = 10$ мкм



$I = \frac{S_c}{4}$ – мощность энергии от Солнца на единицу площади

Отражательная способность Земли – альбедо (A)

Модифицируем: $I_0 = \frac{S_c}{4}(1 - A)$ (для Земли $A = 0{,}3$)

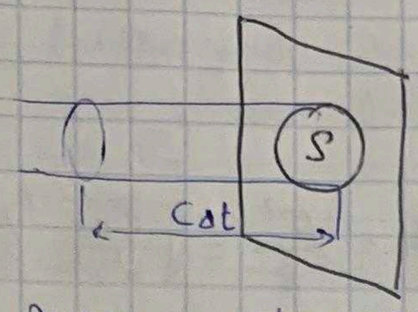
Зная интенсивность энергии, можно искать температуру тела по формуле Стефана-Больцмана: $I = \sigma T^4$, где σ – постоянная С-Б.

$T = \left(\frac{S_c(1-A)}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 255\,K = -18\,^\circ C$ (расчетная т. Земли) (без П. эффекта)

В реальности это не так из-за атмосферы: атмосфера прозрачна для Солнца (видимый диапазон), но не для излучения Земли (ИК-диапазон) Часть отраженной энергии она задерживает ⇒ Суммарная энергия получаемая Землей больше ⇒ Реальная температура Земли больше (17°)

Таким образом т. Земли зависит от альбедо и поглощающей способности атмосф

3.4 Давление электромагнитной волны. Волновой механизм возникновения давления. Зависимость давления от коэффициента отражения.



Если рассматривать свет как поток фотонов то частицы при ударе о тело должны передавать ему импульс, другими словами - оказывать давление

$\mathcal{E} = h\nu$ - энергия фотона

$p = \frac{h}{\lambda}$ - импульс

$V = c\Delta t S$.

$w \cdot V = \mathcal{E}_0 = N \cdot h \cdot \nu$ - полная энергия эл.-м. волны, которая заключена в этом объеме, где w - объемная плотность энергии

$$N = \frac{wV}{h\nu} = \frac{wc S \Delta t}{h\nu}$$

$$\Delta p = \underset{\text{число фотонов}}{N} \cdot \underset{\text{импульс фотона}}{p} = N \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{w \cdot c S \Delta t}{h\nu} \cdot \frac{h}{\lambda} = \left\{ \lambda = \frac{c}{\nu} \right\} = wS\Delta t$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = w \cdot S$$

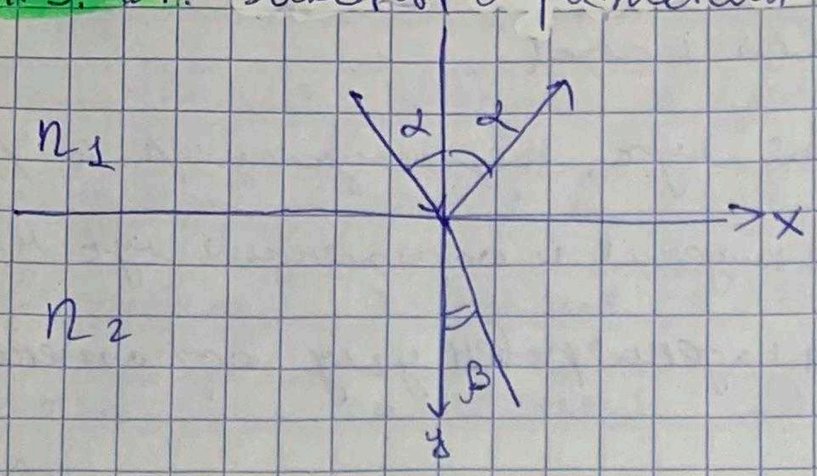
$$P = \frac{F}{S} = w = \frac{S}{c}$$ - полное давление

$$P = \frac{S}{c}(1 + R)$$

R - коэф. отражения

Волновой механизм возникновения давления: при падении волны на отражающую поверхность эл. поле возбуждает токи в приповерхностном слое, на которые действует магнитная составляющая волны. Таким образом, световое давление есть результат сложения многих сил Лоренца, действующих на частицы тела

4.3.44. Законы отражения и преломления. Полное внутреннее отражение



Закон отражения: падающий луч, перпендикуляр к границе раздела двух сред в точке падения и отраженный луч лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения

Закон преломления: падающий луч, перпендикуляр к границе раздела сред в точке падения и преломленный луч лежат в одной плоскости, причем отношение синуса угла падения к синусу угла преломления постоянно для данной пары сред и равно показателю преломления второй среды отн-но первой:

Закон Снеллиуса: $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$

При $n_2 < n_1$ свет идет из более оптически плотной среды в менее плотную (в β)

Если увеличивать α ($\to \beta = 90°$), то придем к $\sin\alpha = \frac{n_2}{n_1}$ (критическое значение)

Получаем полное внутреннее отражение (ПВО)

Но все ж таки просто: $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \Rightarrow \frac{\omega}{c_1}\sin\alpha = \frac{\omega}{c_2}\sin\beta \Rightarrow$

$$\frac{\omega}{c_1}\sin\alpha = \frac{\omega}{c_2}\sin\beta \Rightarrow \quad k_1 \sin\alpha = k_2 \sin\beta$$

$k_2^2 = k_{2x}^2 + k_{2y}^2$ (нормальная и тангенциальная компоненты)

$$k_{2y}^2 = k_2^2 - k_{2x}^2 = \{k_{2x} = k_{1x}\} = \frac{\omega^2}{c_2^2} - \frac{\omega^2}{c_1^2}\sin^2\alpha = \omega^2\left(\frac{1}{\left(\frac{c_0}{n_2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{c_0}{n_1}\right)^2}\cdot\sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{\omega^2}{c_0^2}\left(n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha\right)$$

Если сделать больше критического: $k_{2y} = -i\,\frac{\omega_0}{c_0}\sqrt{n_1^2\sin^2\alpha - n_2^2}$

Рассмотрим $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - (\vec{k},\vec{r}))}$ - ур-е напряженности эл. поля гармонической волны

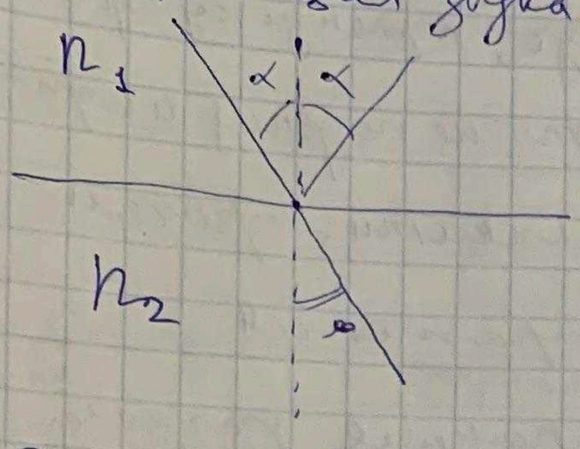
Подставив в показатель экспоненты получим:

По y: $e^{-\frac{\omega}{c_0}\sqrt{n_1^2\sin^2\alpha - n_2^2}\cdot y} = e^{-\frac{y}{d}}$ (затухание волны)

$$d = \frac{c_0}{\omega}\frac{1}{\sqrt{n_1^2\sin^2\alpha - n_2^2}} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{n_1^2\sin^2\alpha - n_2^2}}$$

Итого: волна проникает в среду при полном внутреннем отражении на очень малые длины (не проникает). На этом строится современная спектроскопия

4.3. 4.5. Законы отражения и преломления. Земная рефракция. Радуга
Рефракция звука в океане. Подводный звуковой канал



Закон отражения: падающий луч, перпендикуляр к границе раздела двух сред в точке падения и отраженный луч лежат в одной плоскости, причем угол падения равен углу отражения.

Закон преломления: падающий луч, перпендикуляр к границе раздела сред в точке падения и преломленный луч лежат в одной плоскости, причем отношение синуса угла падения к синусу угла преломления. постоянно для данной пары сред и равно показателю преломления второй среды отн-но первой

Закон Снеллиуса: $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$

Земная рефракция - эффект когда видны объекты находящиеся за линией горизонта

При приближении к поверхности Земли показатель преломления атмосферы увеличивается. То есть свет в атмосфере не распространяется прямолинейно. При нормальном распределении температуры и плотности воздуха в приземном сл-е кривая линия, изображающая траекторию светового луча, обращена к Земле своей вогнутой стороной.

Угол земной рефракции: $\varphi \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$ рад.

Рефракция звука в океане:

Рефракция - искривление звуковых лучей в неоднородной среде. Звуковые лучи поворачивают всегда к слою с меньшей скоростью звука, и рефракция выражается тем сильнее, чем больше градиент скорости звука

Подводный звуковой канал - слой воды в морях и океанах, в котором возможно сверхдальнее распространение звука вследствие рефракции

На некоторой глубине под поверхностью воды находится слой, в котором звук распространяется с наименьшей скоростью; выше этой глубины скорость увеличивается из-за повышения температуры, ниже - увеличения солености

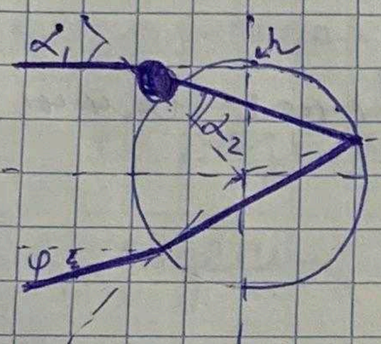
Радуга

Дисперсия - явление связанное с тем, что ЭМ волны разных длин распространяются в среде с разной скоростью

В природе дисперсия наблюдается в радуге. Она возникает из-за того, что солнечный свет преломляется и отражается каплями воды. Эти капли по-разному отклоняют свет разных цветов

Угол, под которым уходит из капли отраженный и преломленный луч зависит от прицельного параметра капли (расстояние от оси сферической капли до точки падения луча). Больше всего света капля разворачивает именно на этот угол. (max - яркость)

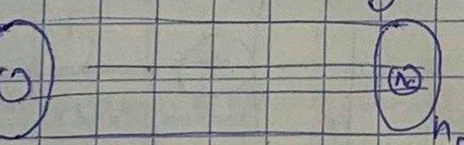
Для одного отражения внутри капли такой угол имеет одно значение (для двух других). Этому соответствует первичная (вторичная) радуга.



Первичная - самая яркая, уходит из капли с большим углом

4.6 Волоконная оптика. Волоконно-оптические линии связи. Скорость передачи информации. WDM-технология. Волоконные световоды в медицине

На эффекте полного внутреннего отражения строится оптоволоконная передача



$n_c > n_{об} \Rightarrow \frac{c_0}{c_c} > \frac{c_0}{c_{об}} \Rightarrow c_{об} > c_c$

Оптическое волокно - нить из оптически прозрачного материала (стекло, пластик) используемая для переноса света внутри себя посредством ПВО

Для обеспечения ПВО показатель преломления сердцевины несколько выше показателя преломления оболочки

Последний рекорд скорости 255 Терабит/с

WDM-технология, которая позволяет осуществить передачу по одному оптическому волокну нескольких информационных каналов на разных несущих частотах

Основана на способности оптоволокна передавать свет одновременно разных длин волн без взаимных интерференции и дальнейшем мультиплексировании/демультиплексировании сигналов

Принцип действия: (систем со спектральным уплотнением)

1) Каждым лазерным передатчиком генерируется сигнал на определенной частоте из общей полосы

2) Перед вводом в оптическое волокно все эти сигналы посредством мультиплексора объединяются

3) На приемном конце данные сигналы аналогично посредством демультиплексора разъединяются

В медицине: в основном в фиброскопах. Фиброскоп состоит из двух жгутов волоконных световодов: по одному проводится свет к биопрепарату, а по другому передается изображение к наблюдателю

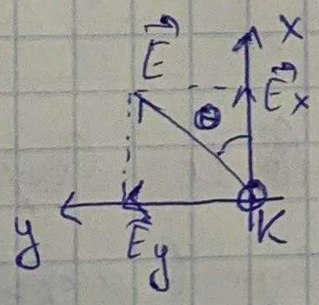
Ч. 7 Поляризация электромагнитных волн. Линейная, эллиптическая, круговая поляризация. Естественный свет

Поляризация характеризует ориентированность векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве

Будем рассматривать $\vec{E}$. Абсолютно аналогично можно для $\vec{H}$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = E_{mx}\cos(\omega t - kz + \varphi_1) + E_{my}\cos(\omega t - kz + \varphi_2)$$

Плоскость поляризации - плоскость проходящая через $\vec{E}$ поляризованной волны и её направление распространения



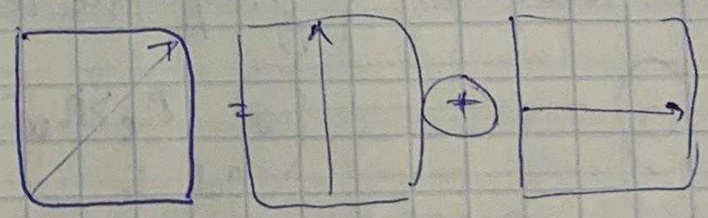
$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{E_y}{E_x} \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Линейная поляризация:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2}\cdot\cos(\omega t - kz + \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{E_{my}}{E_{mx}} = const$$



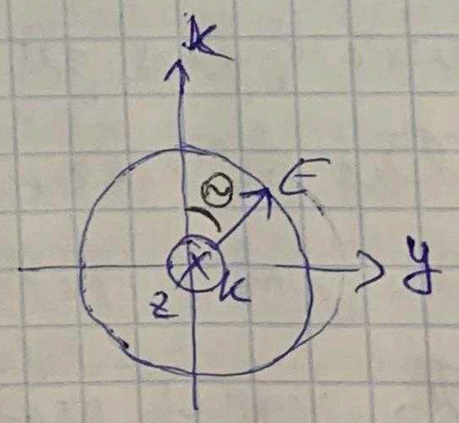
Круговая поляризация:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0\sqrt{2} \quad ; \quad \operatorname{tg}\Theta = \pm\operatorname{tg}(\omega t - kz + \varphi_1)$$

$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Theta = +(\omega t - kz + \varphi_1)$ - с увеличением времени угол увеличивается (правая поляризация)

$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ левая поляризация



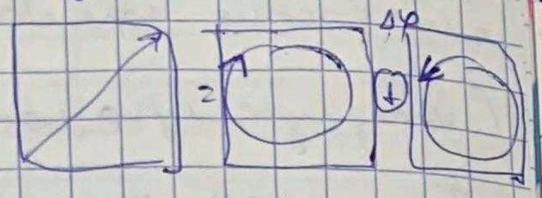
Круговая поляризация - сумма двух волн с линейными ортогональными поляризациями

Линейную поляризацию можно представить как сумму круговых.

- Эллиптическая поляризация

Амплитуды составляющих вектора $\vec{E}$ зависят произвольным образом, так же как и начальные фазы

Направление вращения вектора $\vec{E}$ будет определять вид эллиптической поляризации



Естественный свет - неполяризованный, свет с неупорядоченной равновероятностной ориентацией вектора $\vec{E}$. Можно представить как наложение двух некогерентных волн, поляризованных во взаимноперпендик. плоскостях

Ч. 3. 4.9 Отражение и преломление поляризованных волн. Формулы Френеля

Поляризационные эффекты на границе раздела. Угол Брюстера

S-амп. прел.; $S = \frac{2\cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} P$, $Q = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} P$

Q-амп. отр.;

Формулы Френеля - определяют амплитуды и интенсивности преломленной и отраженной ЭМ-волны при прохождении через плоскую границу раздела двух сред с разными показателями преломления

- При падении на плоскую границу раздела возникают две поляризации.

S-Поляризация - напряженность электрического поля ЭМ-волны перп. пл. пад.

P-Поляризация - напряженность электрического поля лежит в плоскости падения

- Т.к. свет с разными поляризациями по-разному отражается от поверхности, то отраженный свет всегда частично поляризован, даже если падающий свет неполяризован. Угол падения при котором отраженный луч полностью поляризован называется углом Брюстера; $\operatorname{tg}\Theta_{Br} = \frac{n_2}{n_1}$

При падении под углом Б. отраженный и преломленный лучи взаимно перп.

Ч. 10-4.12 Распространение электромагнитных волн в кристаллах. Двулучепреломление. Построение Гюйгенса для волнового фронта. Принцип работы ЖК дисплея

Среды, свойства которых одинаковы по всем направлениям называются изотропными

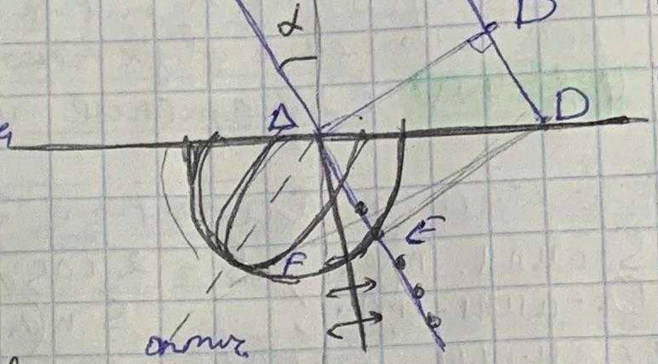
Анизотропными называются среды, свойства которых неодинаковы в различных направлениях. Анизотропия характерна для кристаллов

В кристалле будут распространяться одновременно 2 линейно поля-

ризованные волны - обыкновенная и необыкновенная - у которых плоскости колебаний $\vec{E}$ будут взаимно перпендикулярны
(Двулучепреломление)
(Показатель преломления обыкновенного луча постоянен для любого направления в кристалле, а необыкновенного луча переменный и зависит от направления)
Оптическая ось кристалла - направление в кристалле, по которому луч света распространяется не испытывая двойного лучепреломления

Построение Гюйгенса

Параллельный пучек света падает под углом α к поверхности кристалла. За время, в течение которого правый край фронта AB достигает точки D на поверхности кристалла, вокруг каждой из точек на поверхности кристалла между A и D возникают две волновые поверхности - сферическая и эллипсоидальная (соприкасаются друг с другом вдоль оптической оси).



т.к. скорость распространения одинакова во всех направлениях

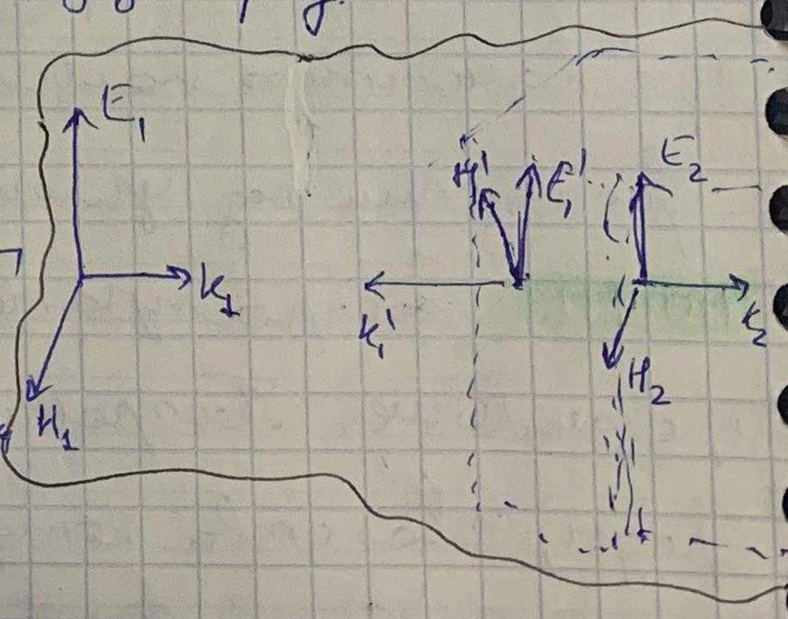
Для нахождения фронтов обык. и необык. волн проводим касательные DE и DF соответственно к сфере и эллипсоиду

- Принцип работы любого ЖК-дисплея основан на свойстве жидких кристаллов изменять (поворачивать) плоскость поляризации проходящего через него света пропорционально приложенному к ним напряжению

4.1 Нормальное падение ЭМ-волны на границу раздела двух сред.

ЭМ-волна падает из 1 во 2 среду по нормали:

Граничные условия: $\begin{cases} E_1 + E_1' = E_2 \\ H_1 - H_1' = H_2 \end{cases}$ $E = zH$ $z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ — характеристика среды



$\begin{cases} E_1 + E_1' = E_2 \\ \frac{E_1}{z_1} - \frac{E_1'}{z_1} = \frac{E_2}{z_2} \end{cases}$ Введем: коэфф. $R = \frac{E_1'}{E_1}$ коэфф. прошед. $T = \frac{E_2}{E_1}$

$\begin{cases} 1 + R = T \\ \frac{1}{z_1} - \frac{R}{z_1} = \frac{T}{z_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \\ T = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon} \\ \mu = 1 \text{ - для диэлектриков} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ T = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{cases}$

$R < 0 \Rightarrow$ поле E_1' направлено в другую сторону (с точки зрения волны - изменение фазы на π = на полволны). Если $n_1 < n_2 \Rightarrow$ потеря полволны

$R^I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$ (по интенсивности)

$T^I = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$ $R^I + T^I = 1$ (сохранение энергии)

4.2 Электро-механическая аналогия в теории волн

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \xi = 0$ – волновое уравнение

давление → P, V (акустика) ; ск-ть → ξ → E, H (э-м волны)

$p \leftrightarrow E$

$V \leftrightarrow H$

$p = z \cdot V$; $E = z \cdot H$

$z_{эл/м} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$, $z_{ак} = \rho_0 c_0$ ← плотность среды

$\rho_0 \Leftrightarrow \mu \mu_0$, $\beta \leftrightarrow \varepsilon \varepsilon_0$

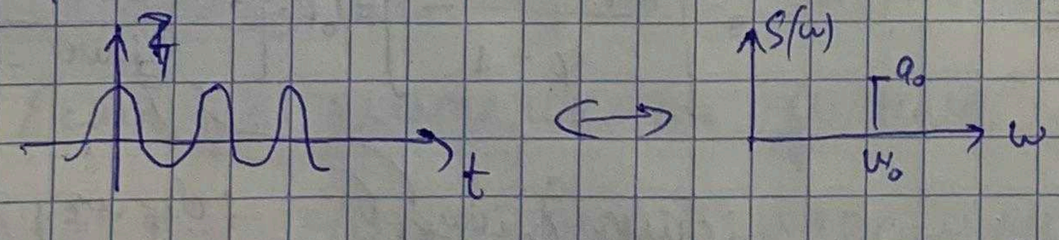
сжимаемость $\beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}$

Коэф. отражения и пропускания справедливы и для волн и тел:

$R = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$; $T = \frac{2 z_2}{z_2 + z_1}$.

5.1 и 5.2 Способы передачи информации волной. Биения, амплитудная модуляция, частотный спектр сигнала с амплитудной модуляцией по гармоническому закону и его зависимость от параметров сигнала. Кодирование в АМ и ЧМ.

$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t - kx + \varphi_0)$ $x \in -\infty, +\infty$; $t \in -\infty, +\infty$



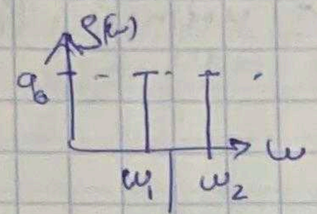
– зарегистрированному сигналу $f(t)$, как ф-ии времени можно сопоставить частотный спектр

Чтобы передать информацию волной, осуществляется изменение во времени её параметров. Вызванное этим изменение принимаемого сигнала содержит передаваемую информацию.

Амплитудная модуляция: $f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; Фазовая модуляция: $f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$

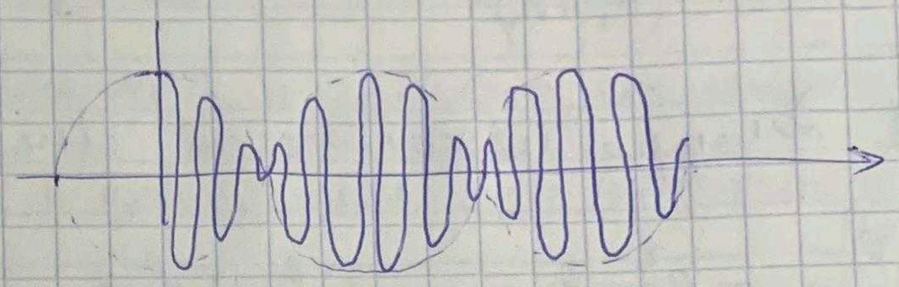


Самый простой способ осуществить АМ - сложить 2 гармонических колебания

$\xi(t) = a\cos\omega_1 t + a_0\cos\omega_2 t$ 

При $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$ (т.е для близких частот) ω_0

суммарный сигнал имеет вид биений:



$\xi(t) = 2a\cos\omega_M t \cdot \cos\omega_0 t$

$\omega_M = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} << \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

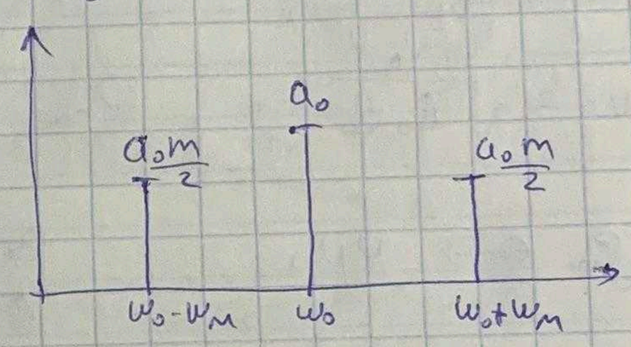
В выходном колебании практически сохраняется исходный косинус (ω_0), но будет промодулирован вторым cos-инусом.

В реальности (в радиовещании) при гармонической модуляции амплитуды изменение сигнала $\xi(t)$ во времени имеет вид:

$\xi(t) = a_0(1 + m\cos\omega_m t)\cdot\cos\omega_0 t$, где

ω_m - частота модуляции, m - глубина модуляции

ω_0 - несущая частота (частота ЭМ-волны)



$\xi(t) = a_0\cos\omega_0 t + \frac{a_0 m}{2}\cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{a_0 m}{2}\cos(\omega_0 + \omega_m)t$

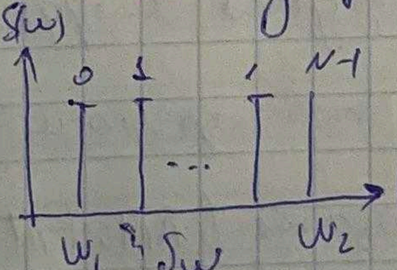
Радио-вещание: длинная волна (λ: 600 - 1500м) 200-500 кГц
средняя волна (λ = 100 - 600 м) 500кГц - 3 МГц
короткая волна (λ = 10 - 100 м) 3 МГц - 15 МГц

$\lambda = c_0 \cdot T = \frac{c_0}{\nu}$

- АМ

GSM - 900, 1800, 2100 мГц, LTE ~ 2600 мГц - ФМ

5.3-5.4 Суперпозиция эквидистантных гармоник



$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \delta\omega\cdot(N-1)$ - полоса частот

$\omega_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_1 + \frac{\delta\omega\cdot(N-1)}{2}$ - центральная частота

$\Delta\omega << \omega_1, \omega_2$ - узкополосный сигнал

$\xi(t) = a_0\cdot\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\omega_1 + n\delta\omega)t = a_0\cdot Re\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega_1 + n\delta\omega)t} = Re\left\{b_1\frac{(q^N - 1)}{q-1}\right\} = a_0 Re\left\{e^{i\omega_1 t}\frac{e^{i\delta\omega N t} - 1}{e^{i\delta\omega t} - 1}\right\}$

$\frac{e^{i\delta\omega\frac{N}{2}t}\left(e^{i\delta\omega\frac{N}{2}t} - e^{-i\delta\omega\frac{N}{2}t}\right)}{e^{i\delta\omega\frac{1}{2}t}\left(e^{i\delta\omega\frac{1}{2}t} - e^{-i\delta\omega\frac{1}{2}t}\right)}$

$\xi(t) = \frac{a_0\cdot\sin\frac{N\delta\omega}{2}t}{\sin\frac{\delta\omega}{2}t}\cdot Re\, e^{i\underbrace{\left(\omega_1 + \frac{\delta\omega}{2}(N-1)\right)}_{\omega_0}t}$

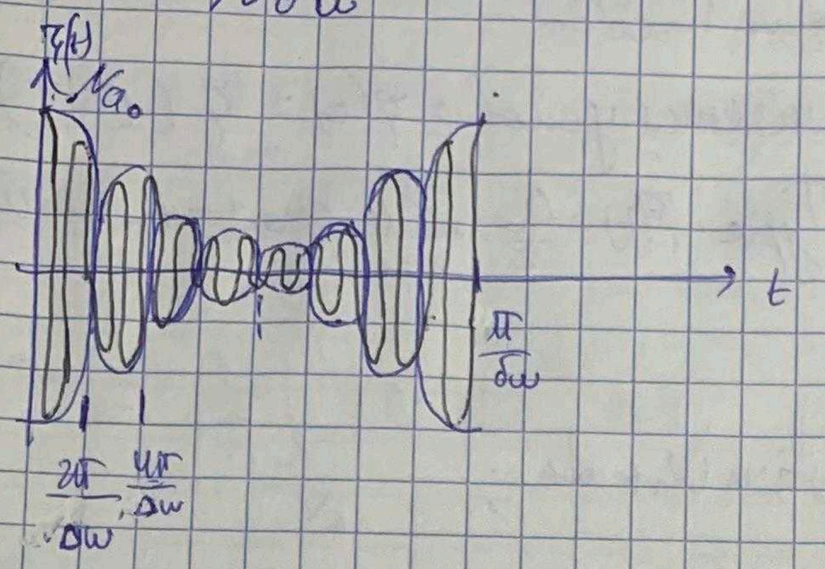
$\xi(t) = A(t)\cdot\cos\omega_0 t$, где $A(t) = a_0\frac{\sin\frac{N\delta\omega}{2}t}{\sin\frac{\delta\omega}{2}t}$ - представим сигнал в виде квазигармонического т.е у которого амплитуда $A(t)$ медленно меняется по сравнению с гармонической функцией на центральной частоте ω_0: $\frac{\partial A(t)}{\partial t}\frac{2\pi}{\omega_0} << A(t)$

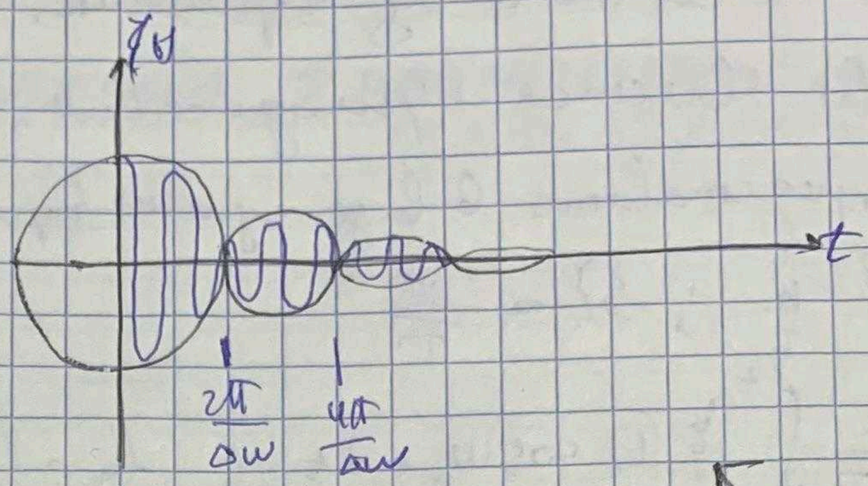
При $\frac{\delta\omega t}{2} = \pi s$, $s = 0, 1, 2.$

$t_s = \frac{2\pi s}{\delta\omega}$ и $A(t_s) = N\cdot a_0 = A(0)$ - Максимум $A(t)$ (по амплитуде)

При $\frac{N\delta\omega t}{2} = \pi q$, $q = 1, 2, \dots N-1, N+1$ - кратное

$t_q = \frac{2\pi q}{N\delta\omega}$ и амплитуда огибающей $= 0$: $A(t_q) = 0$





При $N \to \infty$ и $\delta\omega \to 0$ так, что $\Delta\omega$ - const.

$A(t) = a_0 \cdot \sin c \frac{\Delta\omega}{2} t$ и спектр становится сплошным

В смысле со сплошным спектром $\exists!$ момент времени $t = 0$ при котором у беск. мн-ва гармоник совпадают фазы, а амплитуда их огибающей достигает глобального максимума

Эксперимент с маятниками: (частоты соседних отличаются на одинаковую величину)

После одновременного отклонения всех маятников, они начинают колебаться таким образом, что фазовые сдвиги между соседями возрастают прог. t. Маятники колеблются вразнобой. Однако, через определенный, достаточно большой промежуток времени фазы колебаний снова совпадают, и маятники колеблются «в такт»

Теорема о ширине частотной полосы

Если за длительность Δt сигнала принять величину, равную половине интервала, содержащего главный максимум огибающей, то $\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ ⇒ Теорема: $\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi$

(=) - если при $t = 0$ у всех гармоник фазы совпадают

(≥) - если при $t = 0$ фазы гармоник не совпадают

Чем шире спектральная полоса, тем короче импульс

6-1 Спектр периодического сигнала. Спектр последовательности прямоугольных импульсов. Влияние длительности импульса и периода следования на спектр. Формирование сигнала из гармоник. Осцилляции Гиббса

Сигнал $\xi(t)$ является периодическим, если выполняется условие $\xi(t) = \xi(t+T)$

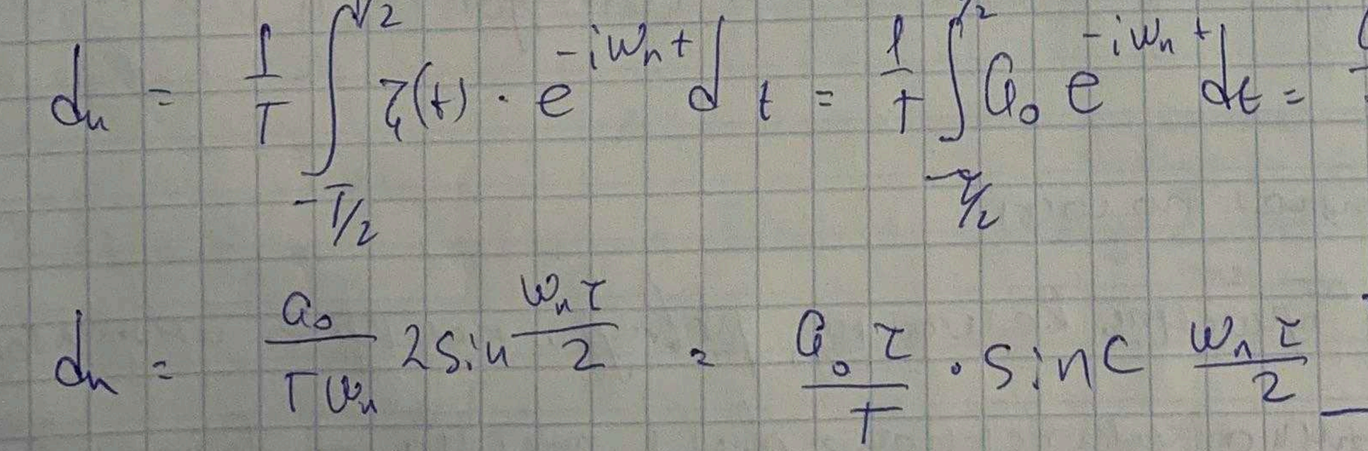
Можно представить в виде суммы гармоник Фурье: $\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t$

$\omega_n = \Omega \cdot \frac{n}{T/2}$; $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t)\cos\omega_n t\, dt$; $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t)\sin\omega_n t\, dt$;

Комплексная форма записи: $\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\omega_n t}$, где $d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt$

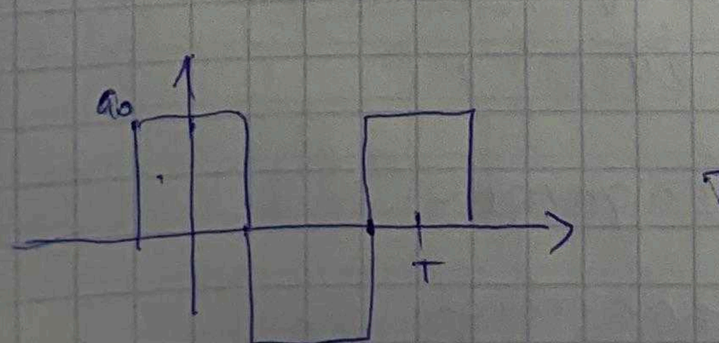
$\xi(t) = \xi(t \pm T) \Longleftrightarrow \{ d_n, n = -\infty, +\infty$



Периодический сигнал имеет дискретный спектр

$e^{i\omega_n t} = \cos\omega_n t + i\sin\omega_n t \Rightarrow a_n = d_n + d_{-n}$; $b_n = i(d_n - d_{-n})$

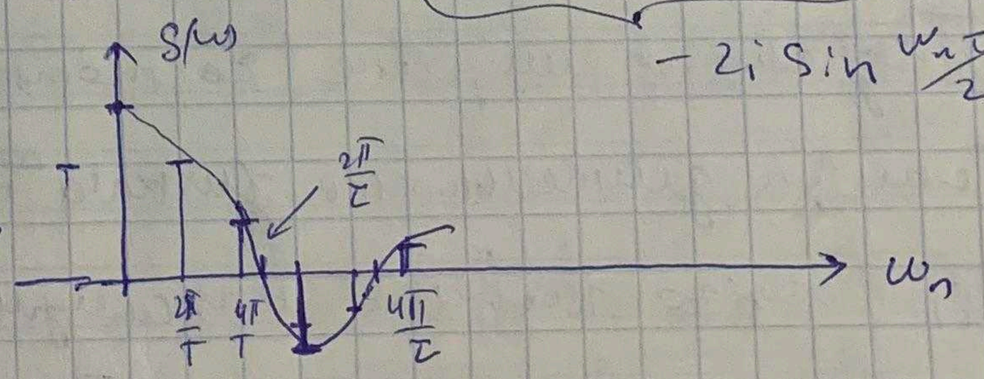
Если $\xi(t)$ - вещественная, то $d_n = d_n^*$ и $a_n = 2\,\mathrm{Re}\, d_n$; $b_n = -2\,\mathrm{Im}\, d_n$



$$\xi(t) = \begin{cases} a, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \qquad t \in [0, T]$$

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \xi(t)\cdot e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a_0 e^{-i\omega_n t} dt = \frac{a_0}{T}\cdot\frac{1}{(i\omega_n)}\cdot\underbrace{\left(e^{-i\omega_n \tau/2} - e^{i\omega_n \tau/2}\right)}_{-2i\sin\frac{\omega_n\tau}{2}}$$

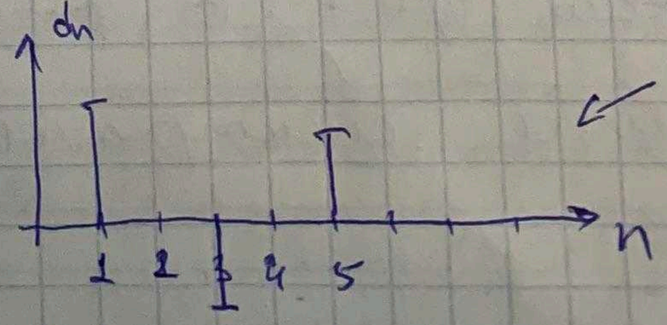
$$d_n = \frac{a_0}{T\omega_n} 2\sin\frac{\omega_n\tau}{2} = \frac{a_0\tau}{T}\cdot \mathrm{sinc}\,\frac{\omega_n\tau}{2}$$



Формирование сигнала

$T = 2\tau$ $\qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T}\cdot n = \frac{2\pi}{2\tau}\cdot n \Rightarrow \frac{\omega_n\tau}{2} = \frac{\pi n}{2}$

$$\Rightarrow d_n = \frac{a_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\frac{\pi n}{2}} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{a_0}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}, & n = 2k+1 \end{cases}$$



← чем меньше τ, тем шире спектр (чем больше T)

$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, d_n \Rightarrow \xi(t) = \frac{2a_0}{\pi}\left(1\cdot\cos\Omega t - \frac{1}{3}\cos 3\Omega t + \frac{1}{5}\cos 5\Omega t \ldots\right)$

6.2. Спектр одиночного импульса. Предельный переход от дискретного спектра к сплошному. Интегр. Фурье. Спектр прямоугольного импульса. Длительного импульса и ширина его спектра

$\xi(t) = \xi(t \pm T)$ - сигнал периодический $\Rightarrow$ можно представить в виде $\Rightarrow$ сумма гармоник

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\omega_n t}, \text{ где } \omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot n$$

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Пусть $T \to \infty$, тогда что $\frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi n} = \frac{\omega}{2\pi}$ $\{n=1\}$ ω - безразмерная величина

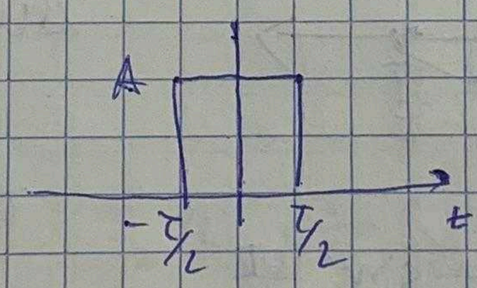
$$\frac{1}{T} \to \frac{1}{2\pi} d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

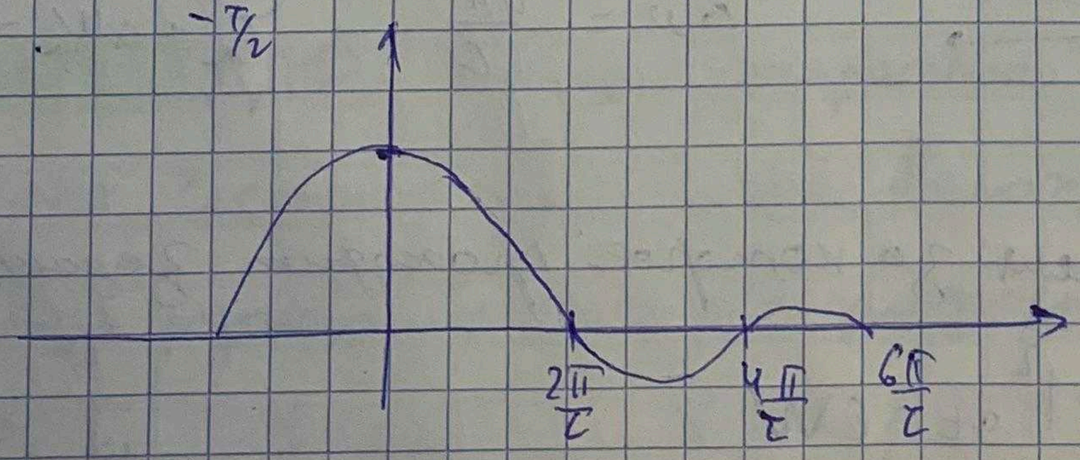
$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt'$$

Прямоугольный импульс:



$$\xi(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega 2\pi} A \cdot \left(e^{-i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{i\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{A}{\pi\omega} \sin\frac{\omega\tau}{2} = \frac{A\tau}{2\pi} \operatorname{sinc}\frac{\omega\tau}{2}$$



Если $\tau \to \infty$, sinc стремится к $S(\omega) = A\delta(\omega)$, $\delta(\omega) = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}\omega\frac{\tau}{2}\right)$

Если $\tau \to 0$, то $S(\omega) = \text{const}$

6.3-6.4 Спектральная плотность мощности. Энергетическая ширина спектра. Теорема Планшереля. Связь формы импульса и ширины спектра.

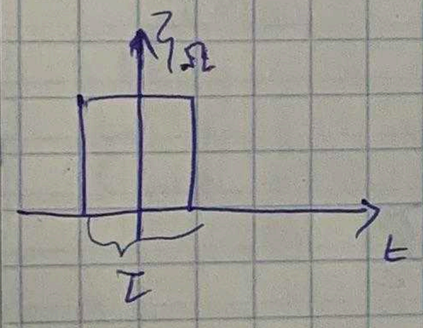
Под спектральной плотностью мощности $G(\omega)$ понимают функцию, которую содержит непрерывное множество гармоник в единичной полосе частот, взятой на частоте ω. Величина $G(\omega)$ определяется выражением

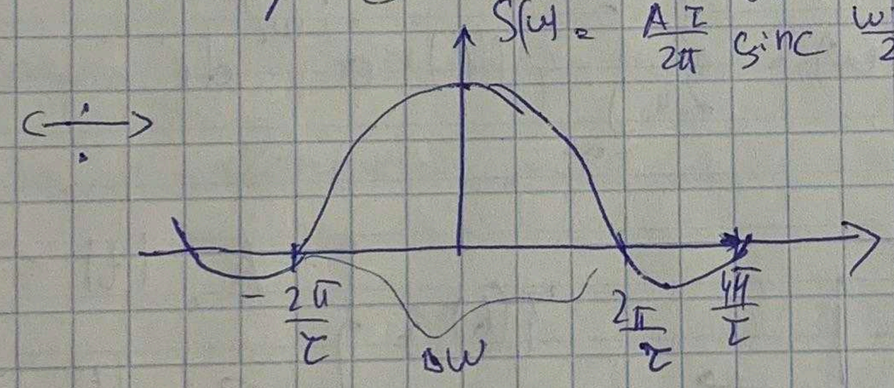
$$G(\omega) = 2\pi |S(\omega)|^2 \qquad [G(\omega)] = Вт/Гц$$

Полная энергия импульса W равна сумме $G(\omega)$ по всем частотам ω и, следовательно, вычисляется по формуле: $W = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, d\omega$

Одновременно, полная энергия W является интегралом по времени от мощности импульса, которая пропорциональна $f(t)^2$: $W = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)^2|\, dt$

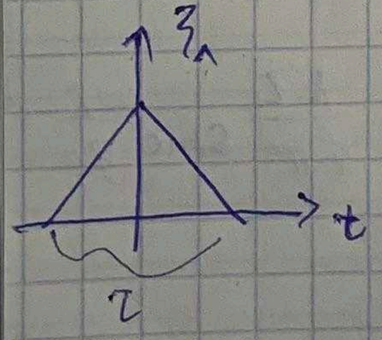
Эти выражения соответствуют т. Планшереля для разложения Фурье:
Для всех. функции квадрат модуля которой интегрируем, существует и однозначно определена (с точностью до значений на мн-ве меры 0) функция являющаяся её преобразованием Фурье.

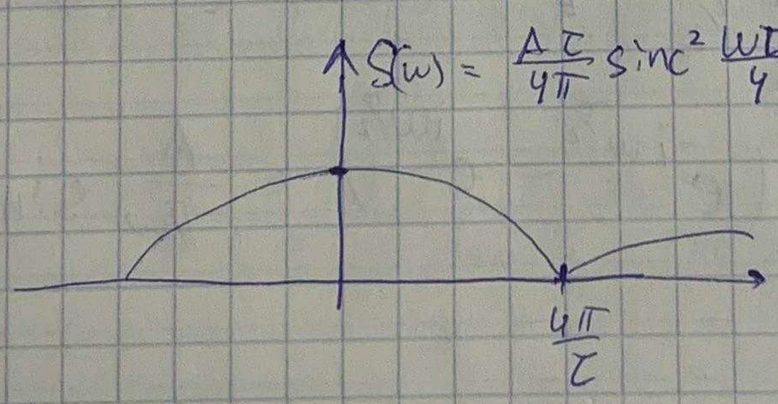




$$\Delta W = \frac{\left(\frac{2\pi}{\tau} - \left(-\frac{2\pi}{\tau}\right)\right)}{2} = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\tau_{\square} \cdot \Delta W_{\square} = 2\pi.$$





$$\Delta W = \frac{4\pi}{\tau} \qquad \tau_{\triangle} \cdot \Delta W_{\triangle} = 4\pi ?$$

Энергетическая длительность $\Delta\tau_w$ - время за которое проходит заданная часть ε энергии импульса: $\int_{-\frac{\Delta t_w}{2}}^{+\frac{\Delta t_w}{2}} |\xi(t)|^2\, dt = \varepsilon W$

Энергетическая ширина спектра ΔW_w - полоса частот, в которой содержится заданная часть ε энергии импульса $\int_{-\Delta W_w}^{+\Delta W_w} G(\omega)\, d\omega = \varepsilon W$ $\varepsilon \approx 0{,}9$ обычно

Для длительности импульса Δt_w и ширины его спектра ΔW_w, определенных по энергии, теорема о ширине частотной полосы принимает вид: $\Delta t_w \cdot \Delta W_w = C$
где C - коэфф. завис от формы импульса

	σ_τ	$\Delta\omega_н$	$\tau_н \cdot \Delta\omega_н$
$\sqcap_\tau$	$0{,}9\tau$	$\frac{5.1}{\tau}$	4.5
$\wedge_\tau$	0.54τ	$\frac{5.2}{\tau}$	2.85,

6.6 Свойства преобразования Фурье

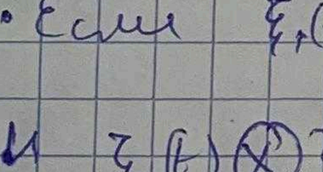
$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad ; \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt$$

1. Линейность

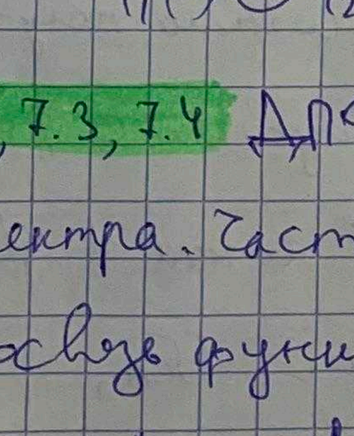
Если $\xi_1(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S_1(\omega)$, $\xi_2(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S_2(\omega)$, то $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 \overset{\cdot}{\leftrightarrow} \alpha_1 S_1(\omega) + \alpha_2 S_2(\omega)$

2. Запаздывание

Если $\xi(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S(\omega)$, то $\xi(t - t_0) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S(\omega) \cdot e^{-i\omega t_0}$



$$\overset{\cdot}{\leftrightarrow} S(\omega) = \frac{A\tau}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$$



$$\overset{\cdot}{\leftrightarrow} S(\omega) = \frac{A\tau}{2\pi} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \cdot e^{-i\omega t_0}$$

3. Теорема смещения:

Если $\xi(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S(\omega)$, то $\xi(t) \cdot e^{i\omega_0 t} \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S(\omega - \omega_0)$

4. Свертка.

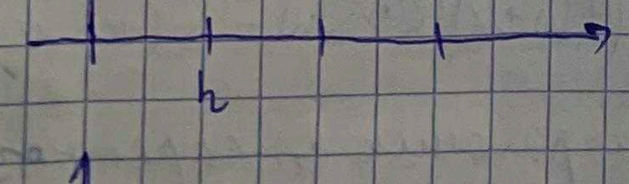
- Если $\xi_1(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S_1(\omega)$, $\xi_2(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S_2(\omega)$, то $\xi_1(t)\xi_2(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\vartheta) \cdot S_2(\omega - \vartheta) d\vartheta$

и $\xi_1(t) \otimes \xi_2(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$.

7.1, 7.3, 7.4 ДПФ. Функция дискретного аргумента и её спектр. Периодизация спектра. Частота Найквиста. Наложение частот. Формула ДПФ. Взаимосвязь функции и спектра при дискретизации на сетке

① $t \to t_j = h \cdot j$; $\xi(t) \to \xi(j) \equiv \xi(h \cdot j) \equiv \xi(t_j) = \xi_h(t)$





$$\text{ШГ}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - hj)$$

$$\xi_h(t) = \xi(t) \cdot \text{ШГ}(t) \cdot h$$

$$\xi(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S(\omega)$$

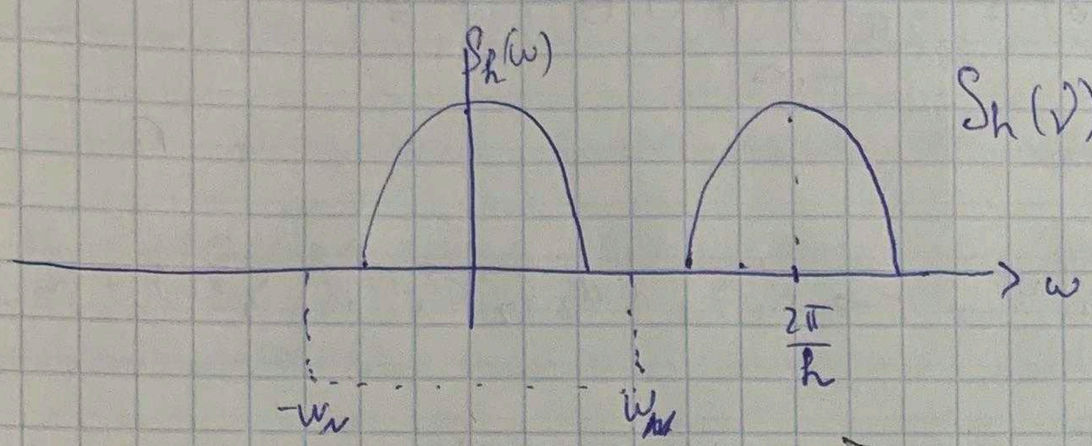
$$\xi_h(t) \overset{\cdot}{\leftrightarrow} S_h(\omega) \quad ?$$

Найдем $S_h(\omega)$

Т.к $\xi_h(t) = \xi(t)\,\amalg(t)\cdot h \Rightarrow S_h(\omega) = S(\omega) \otimes \overline{\amalg}_h(\omega)\cdot h$

$\amalg(t) = \amalg(t \pm h)$ → в пред форме → $\amalg(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{i\omega_n t}$, тогда

$\overline{\amalg}_h(\omega) = \frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{h}\right) \Rightarrow S_h(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi n}{h}\right) =$



$S_h(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(\nu - \frac{n}{h}\right)$ · $\frac{1}{h}$ - частота периодизации

Частота Найквиста. Осцилляции Гиббса

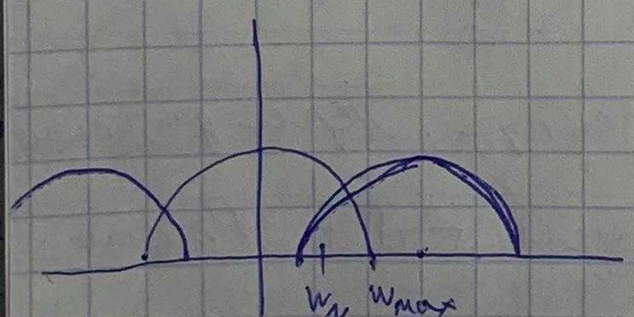
Из этого представления следует, что в спектре сигнала $\xi(t)$ частота ω должна быть ограничена, чтобы не происходило наложение гармоник на „хвостах" спектров.

Верхняя граница частотной полосы, при которой не происходит наложения частот при периодизации спектра в ДПФ наз-ся частотой Найквиста $\omega_N = \frac{2\pi}{h}/2$ - половина частоты периодизации

$\nu = \frac{1}{2h}$

Если ω_{max} в спектре $S(\omega)$ исходного сигнала $< \omega_N \Rightarrow \xi(t)$ полностью восстанавливается по дискретному спектру $S_h(\nu)$.

Наложение частот:



Если $\omega_{max} > \omega_N$, то значения сигнала полученного по дискретному спектру совпадают с $\xi(t)$ при $t = h\cdot j$ (в узлах сетки), при $t \neq h\cdot j$ сигнал $\neq \xi(t)$

Эти отклонения, называемые осцилляциями Гиббса, возникают вследствие наложения частот при периодизации спектра в ДПФ

③ Взаимосвязь спектра и сигнала при дискретизации: $\xi(hj) = \xi(h(j+N)) \Leftrightarrow S(\omega) = S(n \pm \nu)$, $\nu = \frac{F}{h}$

Число отсчетов д. сигнала $\xi_h(t)$ на его периоде T и число гармоник дискретного спектра $S_h(\nu)$ на его периоде $\frac{1}{h}$ одинаково и равно N

④ Формулы и свойства ДПФ

$$\xi(j) \overset{\text{ДПФ}}{\longleftrightarrow} S(n) \qquad j, n = \overline{0, N-1}$$

$$S(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \xi(j) \cdot W_N^{nj} \quad \text{– прямое преобразование} \qquad W_N = e^{i\cdot\frac{2\pi}{N}}$$

$$\xi(j) = \sum_{n=1}^{N} S(n) \cdot W_N^{-nj} \quad \text{– обратное преобразование}$$

Св-ва:

1) Комплексные амплитуды гармоник обладают св-вами ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{-nj} \cdot W_N^{mj} = \begin{cases} N, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nj} \cdot W_N^{nk} = \begin{cases} N \text{ при } j=k \\ 0 \text{ при } j \neq k. \end{cases}$$

2) Линейность

$$\alpha_1 \xi_1(j) + \alpha_2 \xi_2(j) \overset{\text{ДПФ}}{\longleftrightarrow} \alpha_1 S_1(n) + \alpha_2 \cdot S_2(n)$$

3) Запаздывание

$$\xi(j - k_0) \overset{\text{ДПФ}}{\longleftrightarrow} S(n) W_N^{-nk_0}$$

4) Смещение

$$\xi(j) \cdot W_N^{mj} \overset{\text{ДПФ}}{\longleftrightarrow} S(n-m)$$

5) Свертка

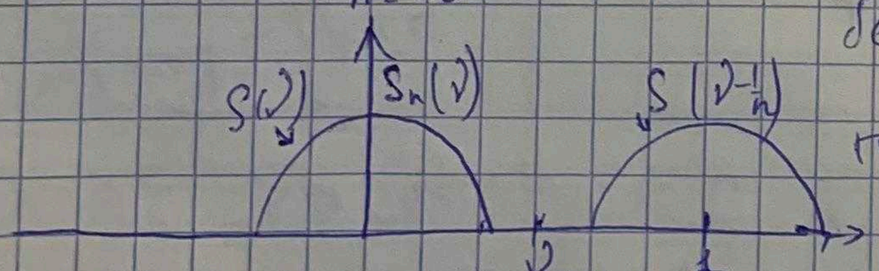
$$\xi_1(j) \cdot \xi_2(j) \overset{\text{ДПФ}}{\longleftrightarrow} S_1(n) \circledast S_2(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} S_1(m) \cdot S_2(n-m)$$

7.2 Восстановление сигнала по его дискретным отсчетам. Формула К-Ш. Частота Найквиста. Ограничение Гиббса. Взаимосвязь функции и спектра

$$\xi(t) \to \xi_h(t) \equiv \xi(j) \equiv \xi(hj)$$

$$\xi_h(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \xi(t) \amalg_h(t - h\cdot j) \cdot h$$

$$S_h(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(\nu - \frac{n}{h}\right)$$ – периодизированный спектр – результат суммирования бесконечного множества спектров $S\left(\nu - \frac{n}{h}\right)$ сдвинутых на n периодов равных $\frac{1}{h}$



Из этого представления следует, что в спектре исходного сигнала частота ν должна быть ограничена, чтобы не происходило наложение гармоник. Верхняя граница частотной полосы, при которой не происходит наложения частот при периодизации спектра: $\nu_в = \frac{1}{2h}$

Теорема:

Если $\xi(t)$ имеет ограниченный спектр $S(\nu) = \begin{cases} \neq 0, & |\nu| \le \nu_{max} \\ = 0, & |\nu| > \nu_{max} \end{cases}$,

и ν_{max} в спектре $S(\nu)$ каждого сигнала меньше ν_N

то непрерывный сигнал полностью восстанавливается по дискретному спектру $S_\delta(w)$ по Формуле К-Ш: $\xi(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \xi(hj) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(t-hj)\right)$

Док-во:

$S(\nu) = S_\delta(\nu) \cdot \Pi(\nu)$, $\Pi(\nu) = \begin{cases} 1, & |\nu| \le \nu_N \\ 0, & |\nu| > \nu_N \end{cases}$

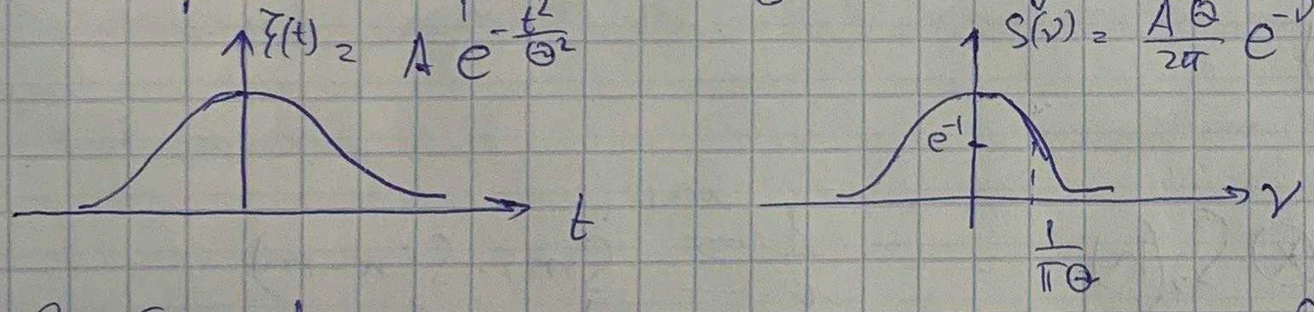
$2 \cdot i \sin 2\pi\nu_N t = 2i \sin \frac{\pi t}{h}$

$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\nu_N}^{\nu_N} e^{i2\pi\nu t} d\nu = \frac{1}{2i\pi t}\left(e^{i2\pi\nu_N t} - e^{-i2\pi\nu_N t}\right) = \frac{1}{\pi t} \sin\frac{\pi t}{h} = \frac{1}{h}\mathrm{sinc}\frac{\pi t}{h}$

$\Rightarrow \xi(t) = \xi_h(t) \otimes \Pi(t) = \xi(t) \cdot \coprod_h(t) \cdot h \otimes \left(\frac{1}{h}\mathrm{sinc}\frac{\pi t}{h}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta\, \xi(\theta) \cdot \coprod_h(\theta) \cdot h \cdot \frac{1}{h} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(t-\theta)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\theta) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(\theta - jh) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(t-\theta)\right) d\theta = \{\theta \to jh\} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \xi(jh)\, \mathrm{sinc}\frac{\pi}{h}(t-jh)$

7.5.-7.6 Выбор шага сетки и области периодизации при ДПФ.

Спектральная фильтрация импульсов и изображений.



Выбор h зависит от max частоты ν_{max} в спектре $S(\nu)$ исходного сигнала

Надо $\nu_N = \frac{1}{2h} > \nu_{max}$

Пусть ν_{max} такое, что $S(\nu_{max}) \ll \max_\nu S(\nu)$

Пусть $h = \frac{\Theta}{3}$; $\nu_{max} = \nu_N = \frac{3}{2\Theta}$.

$S\left(\nu_{max} = \frac{3}{2\Theta}\right) = \frac{A\Theta}{2\pi} \underbrace{e^{-\frac{9}{4\Theta^2}\Theta^2\pi^2}}_{e^{-25}} \sim \frac{A\Theta}{2\pi} \cdot 10^{-11}$

Выбор T:

Пусть $\xi(\pm T/2) = e^{-25} \cdot \xi(t=0)$

$A e^{-\left(\frac{T/2}{\Theta}\right)^2} = e^{-25} A \Rightarrow \frac{T/2}{\Theta} = 5 \Rightarrow T = 10\Theta$

$N = \frac{T}{h} = \frac{10\Theta}{\Theta/3} = 30 = 32$

Спектральная фильтрация

$\xi(t) \xrightarrow{\text{ПДФ}} S(\nu) \xrightarrow{\text{Фильтр}} S(\nu)\cdot\Pi(\nu) \xrightarrow{\text{ОДФ}} \xi'(t)$

3.1.8.4 Пространственная и временная дисперсия. Нормальная и аномальная дисперсия. Формула Рэлея. Зависимость частоты от волнового числа и показателя преломления от длина волны

$$\varphi(x,t) = a \cdot e^{i(\omega t - kx)} = a e^{ik(ct - x)}, \quad \frac{\omega}{k} = c,$$

Если $c(k) = const$ – дисперсии нет

Если $c(k) \neq const$ – дисперсия есть (длины волн, волновой)

Дисперсия – зависимость фазовой скорости волн от частоты

-вследствие которой происходит изменение волнового пакета при распространении

Временная дисперсия: связана с наличием временного запаздывания в реакции среды на волновое возмущение $\omega = \omega_0$ Отклик среды ($\varepsilon(\omega) \neq const$) зависит от час.

Пространственная дисперсия: связана с влиянием на диэлектрическую проницаемость соседних точек $\lambda = l$

$\omega = \omega(k)$ или $c = c(\lambda)$ или $n = n(\lambda)$ или $n = n(\omega)$

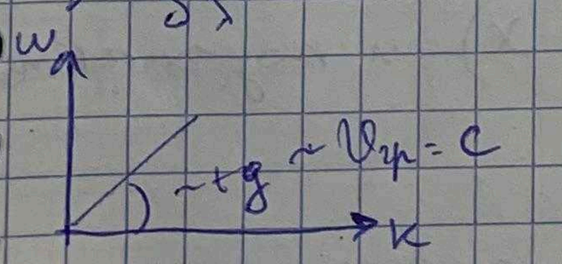
$$v_{гр} = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(c(k) \cdot k) = c(k) + k \frac{\partial c(k)}{\partial k} \quad (=)$$

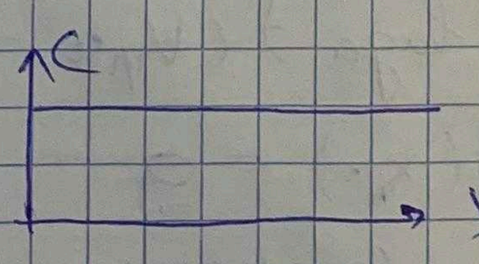
$\omega = ck$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow c(k) = c(\lambda(k))$

$$(=) \quad c(\lambda) + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\partial c}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial k} = c(\lambda) - \lambda \frac{\partial c(\lambda)}{\partial \lambda} - \text{формула Рэлея}$$

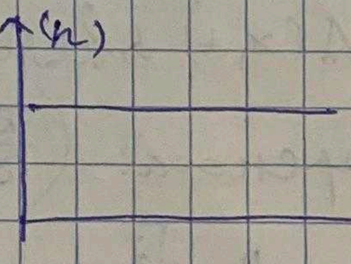
$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial k} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{2\pi}{(2\pi/\lambda)^2} = \frac{-\lambda^2}{2\pi}$

1) $\frac{\partial c}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow c(\lambda) - const$ – дисперсии нет.

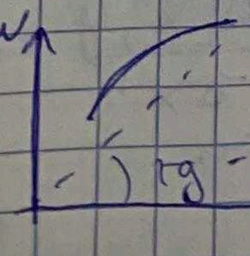


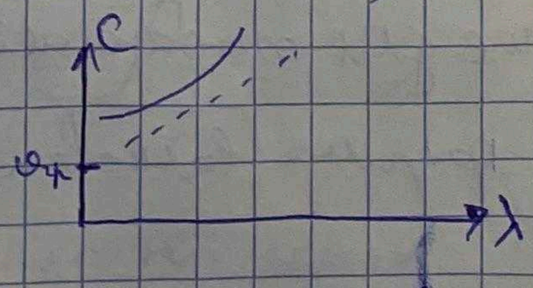


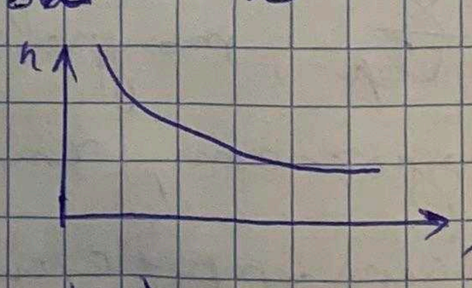
$n(\lambda) = \frac{c_0}{c(\lambda)}$

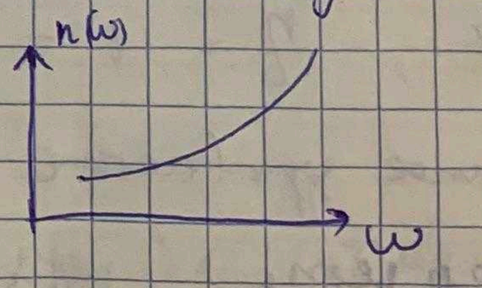


2) $\frac{\partial c}{\partial \lambda} > 0 \Rightarrow v_{гр} < c$; $\frac{\partial \omega}{\partial k} < \frac{\omega}{k}$ – нормальная дисперсия

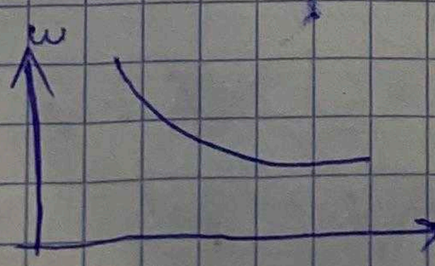


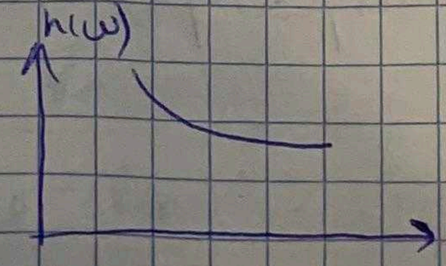


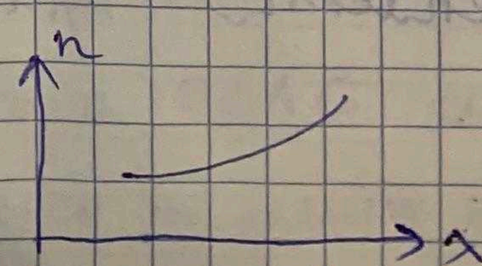




3) $\frac{\partial c}{\partial \lambda} < 0$; $v_{гр} > c$ аномальная дисперсия







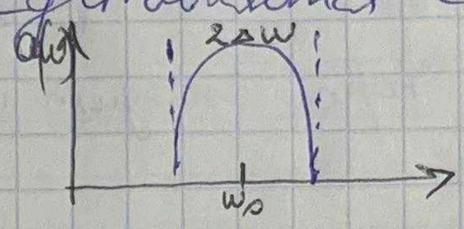
изменения

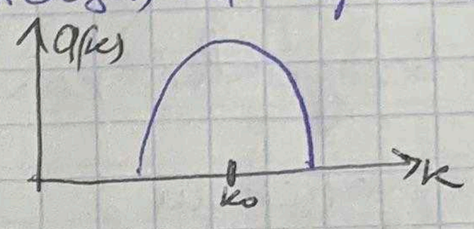
§2-§3 Первое приближение теории дисперсии. Волновой пакет. Групповая скорость. Уравнение переноса для огибающей пакета. Бегущее время. Дисперсия - зависимость фазовой скорости волны в среде от частоты (длины волны, волнового числа) в следствие которой происходит изменение волнового пакета при распространении

Волновой пакет - суперпозиция гармонических волн.

Возмущение $\xi(x,t)$ в волновом пакете (сформированном бесконечным множеством плоских монохроматических волн) представляется следующим интегралом

$$\xi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k) \cdot e^{i(\omega t - kx)}\, dk$$





Условие: $\Delta k \ll k_0$, $\Delta\omega \ll \omega_0$ величина интервала волновых чисел и полоса частот полагаются малыми

При этом условии волновой пакет представим квазигармонической волной:

$$\omega(k)t - kx = \left[\omega(k_0) + \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0}(k-k_0)\right]\cdot t - (k-k_0)x - k_0x = \left(\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0}\cdot t - x\right)\cdot(k-k_0)$$

$$+ \omega(k_0)t - k_0x$$

$$\xi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k)\cdot e^{i\left(\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0}t - x\right)(k-k_0)}\, dk \cdot e^{i(\omega(k_0)t - k_0x)} = A(x,t)\cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)},$$

$$A(x,t) = \int a(k)\, e^{i(v_{гр}t - x)(k-k_0)}\, dk, \quad v_{гр} = \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0}$$ - скорость распространения огибающей - с-ть с которой переносится все гармоники $a(k)$ образующие амплитуду $A(x,t)$

Амплитуда $A(x,t)$ - незначительно меняется на временном T и пространственном масштабах волны: $\frac{\partial A}{\partial t}T$, $\frac{\partial A}{\partial t} \gg \ll A$

В первом приближении волновой пакет распространяется, не искажаясь, и скорость его распространения = $v_{гр}$. Это означает, что огибающая волнового пакета $A(x,t)$ является функцией вида $f(V_{гр}\cdot t - x)$ и подчиняется уравнению переноса: $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V_{гр}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)A(x,t) = 0$

Если перейти к бегущим координатам, связанным с центром импульса:

$x' = x$, $\eta = t - \frac{x}{v_{гр}}$, то уравнение для огибающей: $\frac{\partial A(x',\eta)}{\partial x'} = 0$

Полученное уравнение и означает, что форма волнового пакета не изменяется при распространении

8.5 Второе приближение теории дисперсии. Расплывание волнового пакета и его иллюстрация на $K\bar{\delta}_{\text{и}}$. Дисперсия. Параболическое уравнение дисперсии для амплитуды. Решение для Гауссова импульса. Дисперсионная длина. Влияние дисперсии на скорость передачи информации в ВОЛС

$\xi(x,t)$ в волновом пакете (сформированном бесконечным множеством плоских монохроматических волн) представляется следующим интегралом.

$$\xi(x,t) = \int_{k_0-\delta k}^{k_0+\delta k} a(k)\cdot e^{i(\omega t - kx)}\,dk.$$

$$\omega(k)t - kx = \left[\omega(k_0) + \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0}(k-k_0) + \left.\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right|_{k_0}(k-k_0)^2\right]t - (k-k_0)x - k_0x = \omega(k_0)t$$

$$+ v_{гр}\cdot(k-k_0)t - (k-k_0)x - k_0x = (v_{гр}t - x)(k-k_0) + \omega(k_0)t - k_0x$$

$$\xi(x,t) = \int_{k_0-\delta k=k_2}^{k_0+\delta k=k_1} a(k)\cdot e^{i(v_{гр}t - x)\cdot(k-k_0)}\,dk\cdot e^{i(\omega(k_0)t - k_0x)} = A(x,t)\cdot e^{i(\omega_0 t - k_0x)}$$

Реальное линии связи обладают дисперсией, что ограничивает ск-ть передачи. Вследствие дисперсии форма волнового пакета искажается, его длительность увеличивается, и скорость передачи ($S = \frac{1}{2\tau_0}$) уменьшается.

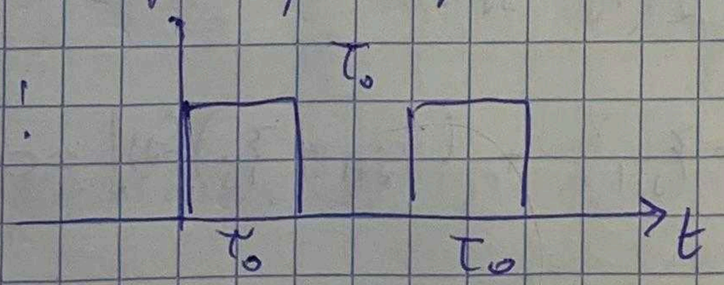
Для оценки увеличения длительности δt волнового пакета можно принять, что крайние гармоники k_1 и k_2 распространяются с разными гр. ск-ми $v_{гр}(k_2)$ и $v_{гр}(k_1)$ $\Rightarrow$

$$\delta t = \left|\frac{L}{v_{гр}(k_1)} - \frac{L}{v_{гр}(k_2)}\right| \overset{\text{Логарифмир.}}{=} L\cdot\left|\frac{\partial}{\partial k}\right|\cdot\left|\frac{1}{v_{гр}(k)}\right|\cdot 2\Delta k = \left\{v_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial k};\ \frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial k}{\partial\omega}\right\} = L\cdot\left|\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right|_{\omega_0}\cdot 2\Delta\omega =$$

$$= L\cdot\left|\frac{\partial}{\partial\omega}\right|\cdot\left|\frac{1}{2v_{гр}(\omega)}\right|\cdot 2\Delta\omega$$

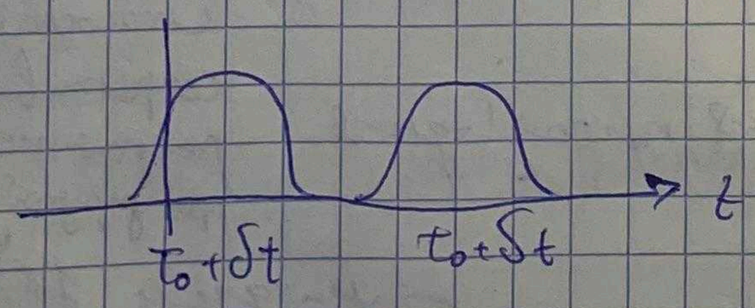
L - длина распространения

$L = 0$:



$$S\left[\frac{\text{бит}}{\text{с}}\right] = \frac{1}{2\tau_0}$$

$L \neq 0$:



$$S = \frac{1}{2(\tau_0+\delta t)}$$

Оптическое волокно имеет наименьшие потери при $\lambda = 1.55$ мкм, а величина $\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2} = 0$ при $\lambda = 1.3$ мкм. Поэтому во многих ОВЛС для получения наибольшей скорости используются световые импульсы на длине волны $\lambda = 1.3$ мкм

Во втором приближении теории дисперсии уравнение для огибающей волнового пакета $A(x,t)$ имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v_{гр}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot A(x,t) - \frac{i}{2}\left|\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

$$x \to x' \;;\quad t \to \eta = t - \frac{x}{v_{гр}}$$

$$\frac{\partial A(x',\eta)}{\partial x} - \frac{i}{2}\left|\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|\frac{\partial^2 A(x',\eta)}{\partial \eta^2} = 0$$

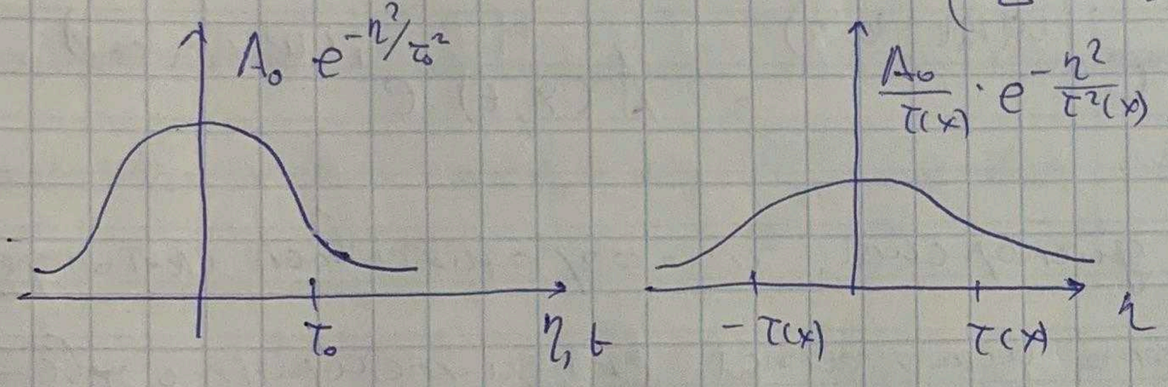
Решение для Гауссова импульса:

$$A(x',\eta) = \frac{A_0}{\tau(x')}\cdot e^{-\eta^2/\tau^2(x')}$$

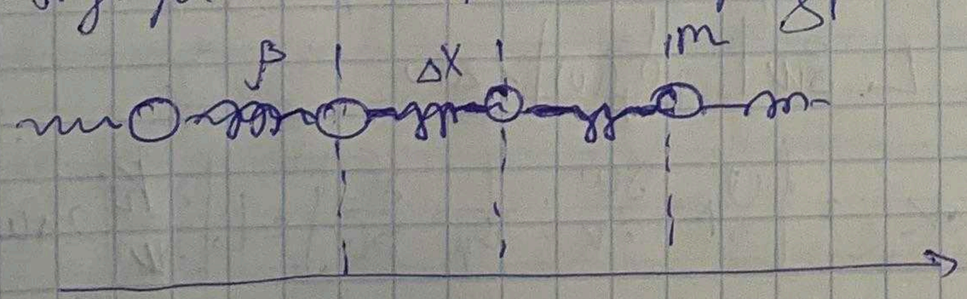
длительность импульса на расстоянии x'

$$\tau(x')^2 = \tau_0^2\left[1 + \left(\frac{x'}{L}\right)^2\right], \quad L = \frac{\left|\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|}{\tau_0^2}$$

- дисперсионная длина, равная расстоянию, на которое длительность огибающей волнового пакета увеличивается в $\sqrt{2}$ раз



9.1 Волны в цепочках. Дисперсионное уравнение. Длинноволновое приближение. Полоса прозрачности. Движение в цепочке при частотах внутри и вне полосы прозрачности



цепочка бесконечна, β - коэф. упругости

$$T[\dot\xi_j] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{m}{2}(\dot\xi_j)^2 \quad \text{- кинетическая энергия}$$

$$U[\xi_j] = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\beta}{2}(\xi_j - \xi_{j-1})^2 \quad \text{- потенциальная энергия}$$

Запишем ур-е Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\xi_j} + \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = 0 \iff m\ddot\xi_j + \beta[(\xi_j - \xi_{j-1}) + (\xi_{j+1} - \xi_j)(-1)] = 0$$

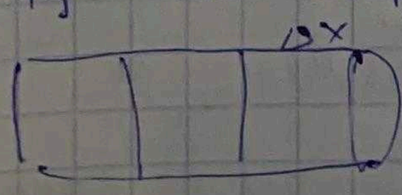
$$\ddot\xi_j + \frac{\beta}{m}(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}) = 0$$

$\Delta^2\xi_j$ - вторая разностная производная

$$\ddot\xi_j - \frac{\beta}{m}\Delta^2\xi_j(t) = 0, \quad j = \pm\infty, +\infty$$

способность материала сопротивляться растяжению-сжатию при упругой деформации

E ← модуль Юнга



$$\rho\cdot S\cdot\Delta x = m \;\Rightarrow\; \beta = \frac{E}{\Delta x}\cdot S$$

$$\frac{\beta}{m} = \frac{\frac{E\cdot S}{\Delta x}}{\rho\cdot S\,\Delta x} = \frac{E}{\rho}\cdot\frac{1}{\Delta x^2} = \frac{c_0^2}{\Delta x^2}$$

← скорость распространения волны

$\ddot{\xi}_j - c_0^2 \frac{\Delta^2 \xi_j}{\Delta x^2} = 0$ - дифференциально разностное ур-е

$\Delta x \to 0$

$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$ - волновое ур-е для непрерывного стержня

$\xi(x,t) = a \cdot e^{i(\omega t - kx)}$ - решение

Подставим в уравнение

$\left[-\omega^2 - c_0^2 (-k^2)\right] \cdot \xi(x,t) = 0$

$\omega = c_0 k$ - дисперсионное ур-е для волны распространяющейся в стержне

нет дисперсии в непрерывной системе

$\omega = \omega(k)$ - ? для цепочки

$\xi_j(t) = a e^{i(\omega t - k_0 x_j)} = a \cdot e^{i(\omega t - \varkappa j)}$ $\left\{ k_0 \Delta x = \varkappa \right\}$ замена

$a \left\{ \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{c_0^2}{\Delta x^2} \cdot \underbrace{\left[\xi_{j-1} - 2\xi_j + \xi_{j+1} \right]}_{e^{-i\varkappa(j-1)} - 2e^{i\varkappa j} + e^{-i\varkappa(j+1)}} = 0 \right.$

$a \left\{ -\omega^2 - \frac{c_0^2}{\Delta x^2} \underbrace{\left[e^{+i\varkappa} - 2 + e^{-i\varkappa} \right]}_{2\cos\varkappa - 2 = -4\sin^2\frac{\varkappa}{2}} \right\} \cdot e^{i(\omega t - \varkappa j)} = 0$

$\omega^2 = c^2 \cdot \frac{1}{\Delta x^2} \cdot 4\sin^2\frac{\varkappa}{2}$

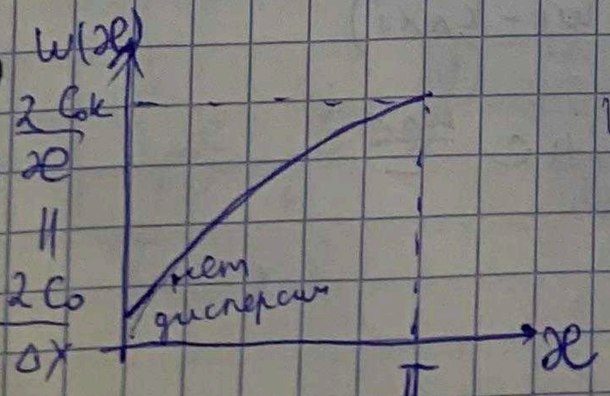
$\omega^2 = c_0 \cdot k^2 \cdot \frac{\sin^2\frac{\varkappa}{2}}{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2}$ $\Rightarrow \boxed{\omega = c_0 k \cdot \frac{\sin\frac{\varkappa}{2}}{\frac{\varkappa}{2}}}$ - появилась пространственная дисперсия

$C = \frac{\omega}{k} = c_0 \frac{\sin\frac{\varkappa}{2}}{\frac{\varkappa}{2}}$ $\Rightarrow v_{гр} = \frac{\varkappa\omega}{\partial k} = c_0 \cos\frac{\varkappa}{2} \neq C$ - есть дисперсия

Длинноволновое приближение

$\varkappa \ll 1 \Rightarrow k \cdot \Delta x \ll 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \ll 1 \Rightarrow \lambda \gg \Delta x$

$\omega(k) = c_0 k$ нет дисперсии (Находим производную каноническую)



} полоса прозрачности

сильная существенно не изменяется

$$\xi_j(t) = a e^{i(\omega t - \varkappa j)}$$

Если $\varkappa = \pi$ $\quad \omega_{max} = \frac{2c_0}{\Delta x}$

$$\xi_j(t) = a e^{i(\omega_{max} t - \pi j)}$$

$$\omega > \omega_{max} \qquad \omega > \frac{2c_0}{\Delta x}$$

$$c_0 k \frac{\sin \frac{k_0 \Delta x}{2}}{\frac{k_0 \Delta x}{2}} > \frac{2c_0}{\Delta x}$$

$$\sin\left(\frac{k_0 \Delta x}{2}\right) > 1 \quad -? \quad \sin\left(\frac{\varkappa}{2}\right) > 1$$

$$\varkappa = \pm i\alpha_0 + \varkappa_0$$

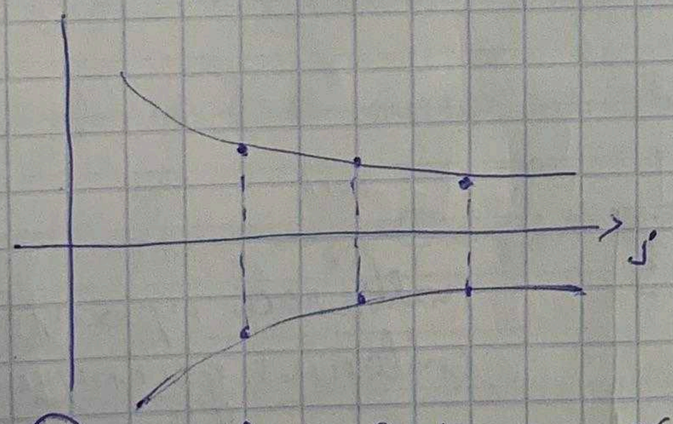
$$\sin\left(\pm i\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\varkappa_0}{2}\right) = \pm \underbrace{\sin \frac{i\alpha_0}{2}}_{\pm i \operatorname{sh} \frac{\alpha_0}{2}} \cdot \cos\frac{\varkappa_0}{2} + \underbrace{\cos\left(\pm \frac{i\alpha_0}{2}\right)}_{\operatorname{ch} \frac{\alpha_0}{2}} \cdot \sin\frac{\varkappa_0}{2}$$

$$\cos\frac{\varkappa_0}{2} = 0$$

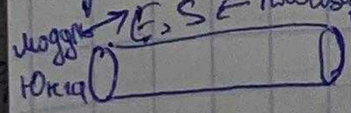
$$1 < \frac{\omega}{\omega_{max}} = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \cdot 1$$

$$\xi_j(t) = a \cdot e^{i(\omega t - \varkappa j)} = a \cdot e^{\pm \alpha_0 j} \cdot e^{i(\omega t - \varkappa_0 j)}$$

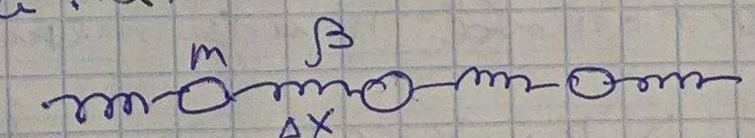
$\varkappa_0 = \pi \Rightarrow \xi_j(t) = a \cdot e^{-\alpha_0 j} \cdot e^{i(\omega t - \pi j)}$



9.2 Дисперсия разностной схемы волнового уравнения. Цепочка как физический аналог разностной схемы. Частота Найквиста и верхняя граница полосы прозрачности цепочки.



сложная $\rightarrow$ дискретный аналог



$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

$$\xi(x,t) = A \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

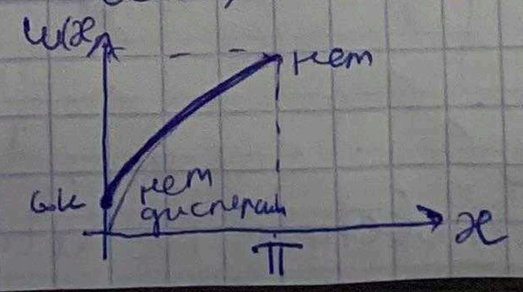
$\omega(k) = c_0 k$ — нет дисперсии в непрерывной системе

дисперсионное уравнение

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} - c_0^2 \frac{\Delta^2 \xi_j}{\Delta x^2} = 0 \qquad k_\Delta x = \varkappa$$

$$\xi_j(t) = A e^{i(\omega t - k_\Delta x j)}$$

$$\omega(k) = c_0 k \cdot \operatorname{sinc} \frac{k_\Delta x}{2}$$



Утверждение 1.

Дифференциально-разностное уравнение описывает волну в цепочке

Утверждение 2

Волна в цепочке (или диф. разн. уравнение) имеет дисперсию,

Дисперсия - следствие дискретизации по x

Утверждение 3

Цепочка (или диф. разн. ур-е) имеет конечную полосу прозрачности

диапазон частот в пределах которого сигнал передается без существенных искажений

или частоту. Наим. частота $\omega_{max} = \omega_N = c_0 \cdot k \cdot \frac{1}{\frac{k\Delta x}{2}} = \frac{2c_0}{\Delta x}$ (подставим Π в диспер. ур-е)

$\frac{k\Delta x}{2} = \frac{\Pi}{2} \Rightarrow \frac{2\Pi}{\lambda_{min}} \cdot \frac{\Delta x}{2} = \frac{\Pi}{2}$

$\lambda_{min} = \lambda_N = 2\Delta x$

Утверждение 4

Дисперсия сеточная мала, если $\lambda >> \lambda_N$

Утверждение 5

Дисперсия сеточная значима, если $\lambda \geq \lambda_N$

Утверждение 6

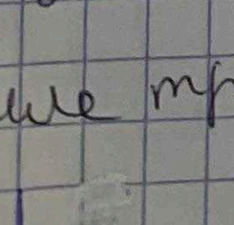
При $\omega > \omega_{max}$ или $\lambda < \lambda_N$. Волна не вводит в цепочку, решение неустойчиво.

10.1-10.2 Электронная теория дисперсии. Нормальная и аномальная дисперсия эм-волн. Линии поглощения. КВ

Дисперсия - зависимость Π эм-волн от их ω. Возникает в результате вынужденных колебаний заряженных частиц под действием переменного поля эм-волны

В классической теории дисперсии электрон рассматривается как затухающий гармонический осциллятор, колебания которого в поле световой волны описываются уравнением: $m\ddot{r} = -fr - \gamma\dot{r} + eE$, где

m - масса, e - заряд электрона, $-fr$ - квазиупругая возвращающая сила, стремящаяся вернуть электрон в положение равновесия, $-\gamma\dot{r}$ - сила, аналогичная силе трения и введенная для учета поглощения света, E - напр. эл. поля действ. на электрон



$(*)\ \ddot{r} + \delta\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{eE}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m}, \quad \delta = \frac{\gamma}{m}$

Предположим, что поле E представляется плоской волной:

$E = A e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0(r) \cdot e^{i\omega t}$.

Из лекции

Для теории дисперсии имеет значение не общее, а только частное решение (*), представляющее вынужденные колебания осциллятора: $r = r_0 \cdot e^{i\omega t}$.

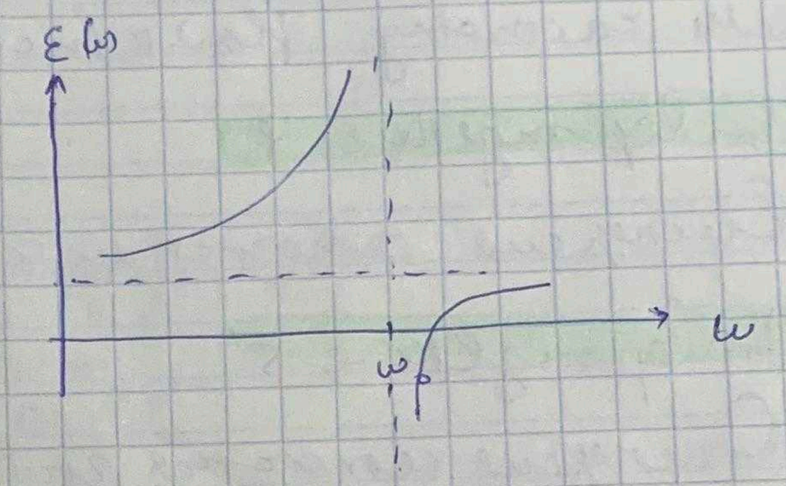
Подставив в (*) найдем r_0: $r_0 = \frac{eE_0}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + i\delta\omega + \omega_0^2} \Leftrightarrow r = \frac{eE}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + i\delta\omega + \omega_0^2}$

Атом в электрическом поле приобретает дипольный момент: $p = e\,r(\omega)$

$P = e \cdot N \cdot r(\omega)$ - вектор поляризации, где N - число атомов в единице объема

$$\begin{cases} D = \varepsilon_0 E + P \\ D = \varepsilon \varepsilon_0 E \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{eN\,r(\omega)}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{eN}{\varepsilon_0 E} \cdot \frac{eE}{m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + i\delta\omega + \omega_0^2}$$

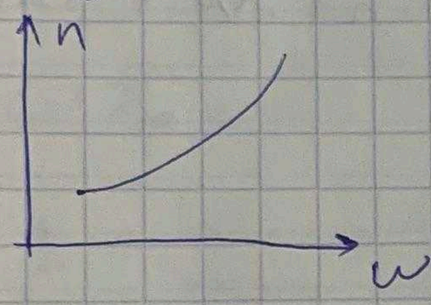
$$\Rightarrow \varepsilon(\omega) = \frac{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega}$$



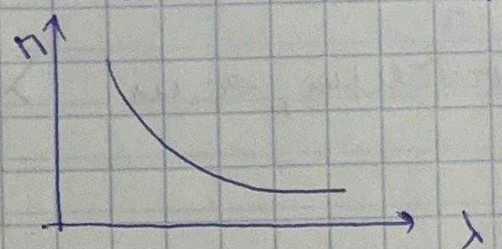
Нормальная дисперсия

- Пусть $\gamma = 0 \Rightarrow \delta = 0$

Тогда $\varepsilon(\omega) = n^2(\omega) = 1 + \frac{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$



$$\omega = k \cdot c_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c_0$$



- Пусть $\gamma \neq 0 \to \delta \neq 0$

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega}$$

$$n'(\omega) = n(1 + i\varkappa)$$

$$[n'(\omega)]^2 = n^2(1 + 2i\varkappa - \varkappa^2) = n^2(1 - \varkappa^2) + i \cdot 2n^2\varkappa$$

$$n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2}(\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$2n^2\varkappa = \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2}(-\delta\omega)$$

Наблюдается в области частот, соответствующих полосам поглощения света в данной среде

10.3 Дисперсия в плазме. Плазменная частота. Распространение волн УКВ-диапазона в атмосфере Земли

В плазме электроны могут рассматриваться как свободные (не связанные в атоме) частицы с собственными частотами равными нулю. Полагая $\omega_0 = 0$ и пренебрегая затуханием $\gamma = 0$, получим:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Nq^2/(\varepsilon_0 m)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\delta\omega} \Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Nq^2/(m\varepsilon_0)}{-\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2}$$

$\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_{пл}}{\omega}\right)^2$, где $\omega_{пл} = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}$, - плазменная частота

N - концентрация свободных электронов

Фазовая скорость ЭМ-волн в плазме:

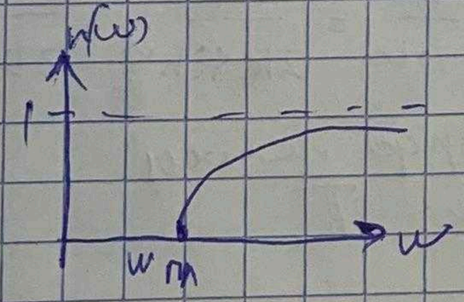
$$c = \frac{c_0}{n(\omega)} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2}}}$$ c_0 - ск. света в вакууме

$\omega = c \cdot k$

$$c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{c_0^2}{1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2}} \Rightarrow \omega(k)^2 - \omega_{пл}^2 = k^2 \cdot c_0^2$$

$$2\omega(k)\frac{d\omega}{dk} = 2k \cdot c_0^2$$

$$V_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k \cdot c_0^2}{\omega(k)} = \frac{c_0^2}{\omega(k)} \cdot \frac{1}{c_0}\sqrt{\omega^2(k) - \omega_{пл}^2} = c_0\sqrt{1 - \frac{\omega_{пл}^2}{\omega^2}}$$



Заметим, что при $\omega < \omega_{пл}$ $\varepsilon < 0$, а n - мнимый. Это значит, что данное ЭМ-волна (частота которых $\omega < \omega_{пл}$) в плазме распространяться не могут!

Радиоволны, излученные радиостанцией А могут отразиться от ионосферы и таким путем достигнуть приемника.

$N_м = 10^4 \div 10^6$ 1/см³

$\lambda_{пл} = 100м \div 30м$

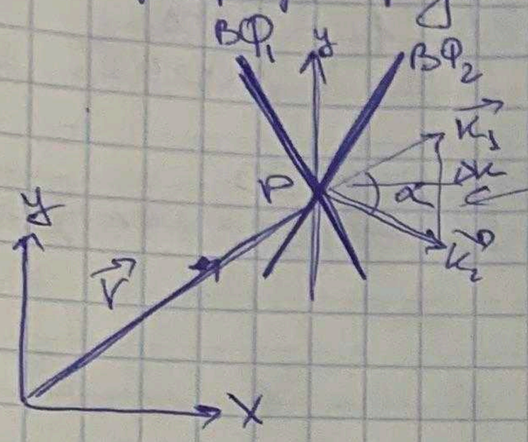
$\omega_{пл} = 10^7$ рад/с

$\lambda_{УКВ} = 0.1мм - 10м$ когда $\omega > \omega_{пл}$ и $n < 1$

изменения

11.1-11-2 Двухлучевая интерференция. Суперпозиция плоских волн, ширина интерференционной полосы. Условия интерференционного максимума и минимума. Интерференция волн от двух точечных источников когерентных. Интерференция волн - суперпозиция 2 или более волн в результате которой происходит перераспределение интенсивности в пространстве

Интерферируют когерентные пучки!



$$\tilde{r}_p(t) = a_1 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_1\vec{r})} + a_2 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})}$$

$$I_p = \langle \tilde{r}_p(t)\, \tilde{r}_p^*(t) \rangle_t = (a_1 e^{-i\vec{k}_1\vec{r}} + a_2 e^{-i\vec{k}_2\vec{r}}) \cdot (a_1 e^{i\vec{k}_1\vec{r}} + a_2 e^{i\vec{k}_2\vec{r}})$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \cdot \underbrace{(e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r}} + e^{-i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r}})}_{2\cos(\Delta\vec{k}, \vec{r})}$$

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi(r_p) = (\Delta\vec{k}, \vec{r})$$

← радиус вектор точки p

Если

$\Delta\varphi = 2m\pi \Rightarrow I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} > I_1 + I_2$ ← интенсивность максимальная

$\Delta\varphi = (2m+1)\pi \Rightarrow I_p = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} < I_1 + I_2$ ← интенсивность минимальная

Пусть $\vec{e}_y \parallel \Delta\vec{k}$; $(\Delta\vec{k}, \vec{r}) = \Delta k \cdot y$

$\Delta k = 2k\sin\frac{\alpha}{2}$

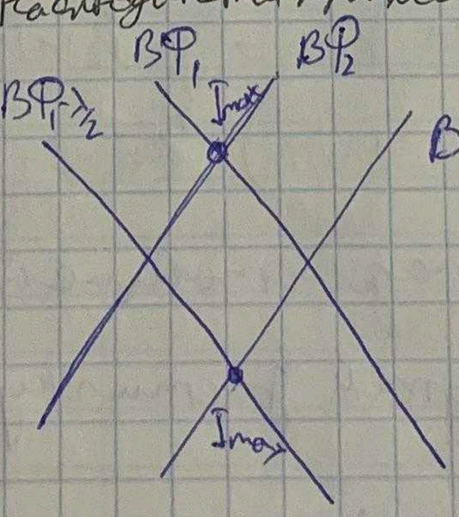
Найдем расстояние между соседними максимумами (минимумами)

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 2m\pi \\ \Delta\varphi = (2m+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta k\, y_m = 2m\pi \\ \Delta k\, y_{m+1} = (2m+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{2k\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

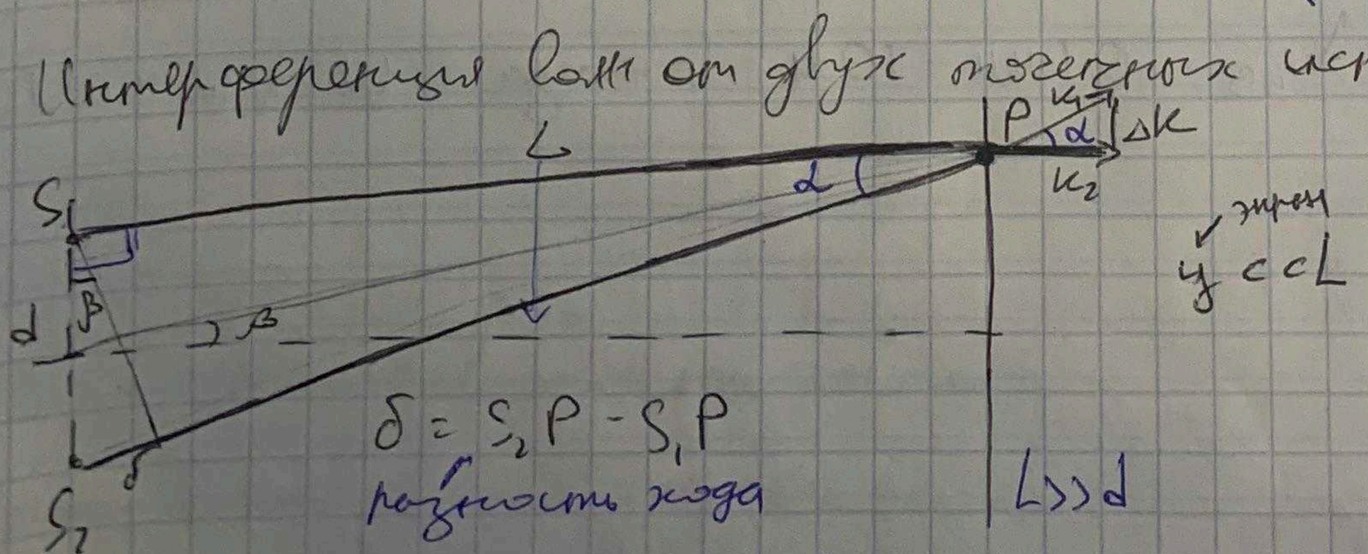
наблюдаются прямолинейные интерф. полосы

Для $\alpha \ll 1$ $\quad \Delta y = \frac{\lambda}{\alpha}$ $\quad \Delta y \cdot \Delta k = 2\pi$

Ширина интерференционной полосы - расстояние между серединами соседних светлых (темных) полос



Интерференция волн от двух точечных источников:



мал

$\Delta\varphi = \Delta k \cdot y = 2k\sin\frac{\alpha}{2} y \approx k\alpha y$

мал

$y = \mathrm{tg}\beta \cdot L = L\cdot\beta$

$\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{d}{L}$

угол

$y \ll L$

max

$\Delta\varphi = \Delta k \cdot y = k\cdot\alpha\cdot L\cdot\beta = k\underbrace{d\cdot\beta}_{\delta} = k\delta \Rightarrow$ $\Delta\varphi = 2m\pi \Rightarrow 2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\delta \Rightarrow \delta = m\lambda$

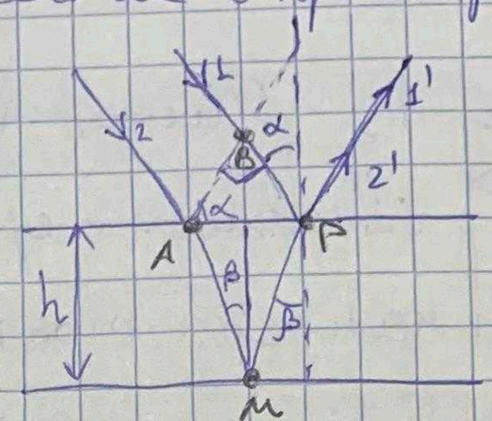
Поверхности равных разностей фаз δ - гиперболоиды $\Delta\varphi = (2m+1)\pi \Rightarrow (2m+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\delta \Rightarrow \delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$

min

11.3-11.4 Интерференция в тонких пленках. Линии равной толщины. Цвета тонких пленок. Просветление оптики. Интерферометр Майкельсона. Открытие гравитационных волн. LIGO.

Интерференция волн – суперпозиция 2 или более волн в результате которой происходит перераспределение интенсивности в пространстве

При освещении тонкой пленки происходит наложение волн отдного и того же источника, отразившихся от передней и задней поверхностей пленки. При этом может возникнуть интерференция. Если свет белый, то интерференционное полосатокрашение. Поэтому это явление получило название цветов тонких пленок



$\zeta_{1B} = \zeta_{2A} = a e^{i\omega t}$

$\zeta_{1P} = a e^{i(\omega t - k_1 BP - \Pi)}$ ← m.к $R_E = \frac{E_{отр}}{E_{пад}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} < 0$ – потеря полуволны

$k_1 = \frac{2\Pi}{\lambda} \Rightarrow \Pi = \frac{k_1 \lambda}{2}$

$\zeta_{1P} = a e^{i(\omega t - k_1 BP - \frac{k_1 \lambda}{2})}$

$\zeta_{2P} = a e^{i(\omega t - k_2 (AM + MP))}$

$\Delta ABP: \quad BP = AP \cdot \sin\alpha = 2h \cdot tg\beta \cdot \sin\alpha$

$\Delta AMP: \quad AM = MP = \frac{h}{\cos\beta}$

$k_2 = \frac{2\Pi}{\lambda_2} = \frac{2\Pi}{c_2 T} = \frac{2\Pi}{\frac{c_0}{n_2} T} = \frac{2\Pi}{cT} \cdot n_2 = k \cdot n_2$ ← в вакууме

$k_1 = k \cdot n_1$

$\Delta\varphi_P = [k_2 (AM + MP) - (k_1 BP + \frac{\lambda}{2} k_1)] = k\left[n_2 \frac{2h}{\cos\beta} - n_1 \cdot 2h tg\beta \sin\alpha - n_1 \frac{\lambda}{2}\right]$

$= k 2h n_2 \left(\underbrace{\frac{1}{\cos\beta} - \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}}_{\cos\beta}\right) - \frac{k\lambda}{2} = k 2h n_2 \cos\beta - k\frac{\lambda}{2} = k \cdot \underbrace{(2h n_2 \cos\beta - \frac{\lambda}{2})}_{\delta_P}$

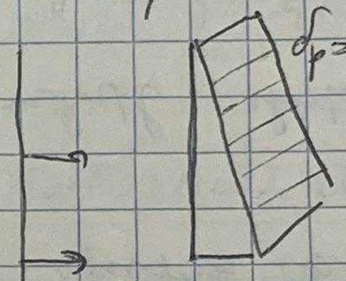
$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$

Если $\alpha = const$ и $\beta = const \Rightarrow \delta_P = f(h) = 2h n_2 \cos\beta - \frac{\lambda}{2}$ ← разность хода

$\delta_P = 2m\frac{\lambda}{2}$ – $\max I_P$ при $h = const$ – линии равной толщины

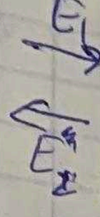
Метод контроля поверхности на плоскопараллельность: Испытуемая поверхность притирается к плоской и наблюдаются полосы интерференции, образующиеся в прослойке – если поверхности стеклянных пластинок неровные, то полосы равной толщины принимают неправильную форму.

Линии равного толщины



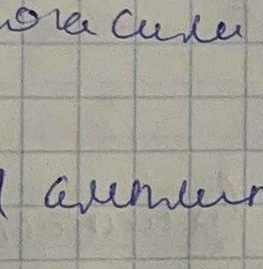
каждая из полос будет в результате отражения от участков клина с одинаковой толщиной

Просветление оптики



$$R_E = \frac{E_2}{E_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\ ; \quad R_I = \frac{I_{отр}}{I_{пад}} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

Для $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$ $R_I = 0,04 \Rightarrow$ 4% (отражается) теряется при прохождении (это Френелевское отражение)



Принцип действия просветляющих покрытий. Основан на явлении интерференции. На поверхность оптической детали наносят тонкую пленку, показатель пр. которой меньше показателя преломления стекла. Луч, отраженный от поверхности пленки и луч отраженный от границы пленка-стекло когерентны. Можно подобрать толщину пленки так, чтобы при интерференции они погасили бы друг друга, усиливая, таким образом, проходящий свет. Для этого $\Delta\varphi = \pi$ (должны отличаться на половину периода), чтобы лучи погасили друг - друга. Тогда: $\delta = 2hn_2$

$$\Delta\varphi = \delta \cdot k = 2h \cdot n_2 \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \Rightarrow h = \frac{\lambda}{4n_2}$$

И амплитуда должна быть равна:

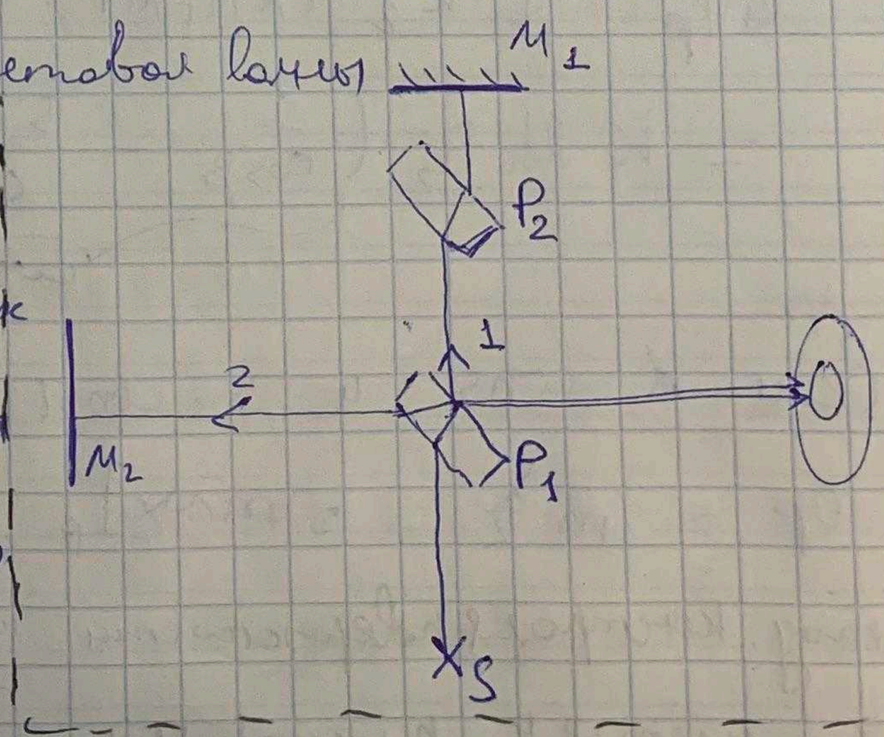
Тогда: $\frac{I_1'}{I_0} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$; $\frac{I_2'}{I_0} = \left(\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}\right)^2$; $I_1' = I_2'$

$\Downarrow$

$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$

Интерферометр - оптический измерительный прибор, основанный на интерф. эффекте. Они позволяют с высокой точностью измерять линейные и угловые расстояния и т.д.

С помощью интерферометра Майкельсона было выполнено первое прямое сравнение эталона метра с длиной световой волны



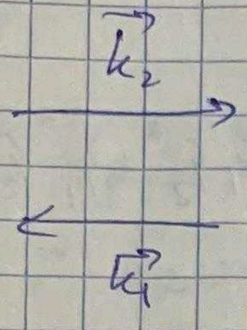
От одного и того же источника получаются 2 пучка лучей одинаковой интенсивности, идущих в зрительную трубу, где и наблюдаются интерф. полосы. P_2 - компенсирует разность хода между пучками, возникающую из-за того, что второй пучок пересекает P_1 3, а первый 1 раз

В 2016 году были детектированы в 2015 году LIGO - лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория

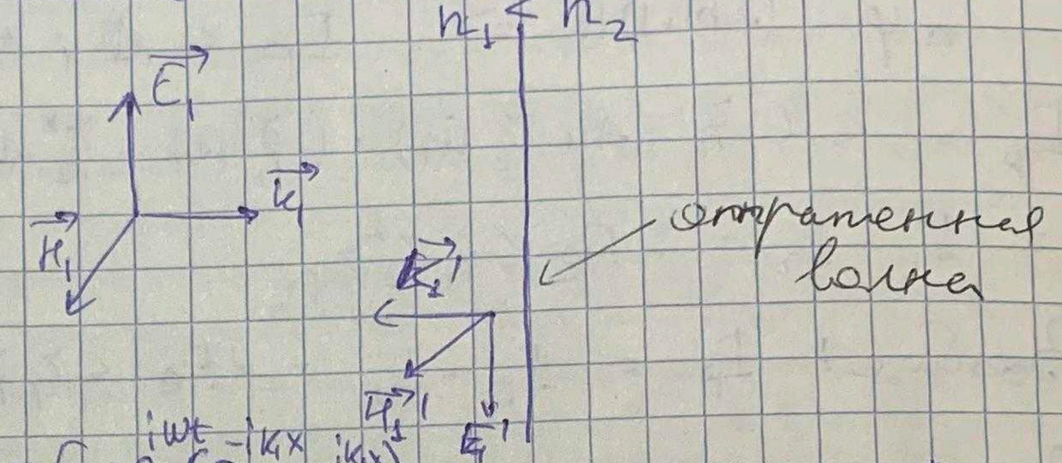
11.5 Стоячие волны, узлы и пучности. Изменение напряженности полей, плотности и потока энергии в эм-стоячей волне

При интерференции монохроматических волн, распространяющихся навстречу друг другу, образуются стоячие волны.

$\Delta y = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ – ширина интерф. полосы – расстояние между серединами соседних светлых (темных) полос.



$\alpha = \pi \Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda}{2}$



$E_1 + E_1' = E_0 \left[e^{i(\omega t + k_1 x)} + e^{i(\omega t + k_1 x)}(-1) \right] = E_0 \cdot e^{i\omega t}\underbrace{(e^{-ik_1 x} - e^{ik_1 x})}_{(-2i)\cdot \sin k_1 x};\quad -i = e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}$

$E_\Sigma = 2E_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \cdot \sin k_1 x$

$E_{\Sigma_u} = \mathrm{Re}\, E_\Sigma = 2E_0 \sin\omega t \cdot \sin k_1 x$; $H_\Sigma = 2H_0 \cos\omega t \cdot \cos k_1 x$

Узел – участок стоячей волны, в которой амплитуда колебаний минимальна;

$\sin kx = 0 \quad kx_n = \pi n \quad \frac{2\pi}{\lambda} x_n = \pi n \quad x_n = \frac{\lambda}{4} \cdot 2n$ ← Пучность H.

Пучность – участок стоячей волны, в которой амплитуда колебаний максимальна

$\sin kx = 1 \Rightarrow x_n = \frac{\lambda}{4}(2n+1)$

Если $\sin\omega t = 1 \Rightarrow E_\Sigma$ – max в пучности, $H = 0$.

$\Rightarrow t_n = \frac{T}{4}(2n+1)$

Рассмотрим, что происходит с энергией:

$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 |E|^2 = 2\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 kx \sin^2\omega t = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E_0^2 (1-\cos 2kx)\cdot(1-\cos 2\omega t)$

$w_H = \frac{\mu\mu_0}{2} H_0^2 (1+\cos 2kx)(1+\cos 2\omega t)$

При $\cos 2kx = -1 \Rightarrow w_E \Rightarrow$ max, но $w_H = 0$

При $\cos 2\omega t = -1 \Rightarrow 2\omega t_{E\max} = \pi \Rightarrow t_{E\max} = \frac{T}{4}(2n+1)$

В эти моменты времени $w_E \Rightarrow$ max в пучностях, а $w_H = 0$

энергия переносится вправо-влево в пределах половины длины волны, но глобального переноса нет.

12.1 Интерференция квазимонохроматических волн. Условие возникновения интерференционной картины. Понятие ~~возникновения~~ когерентности

• Монохроматическое излучение

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = k\delta$$

$$\Delta\varphi = 2m\pi \Rightarrow I_p > I_1 + I_2$$

$$\Delta\varphi = (2m+1)\pi \Rightarrow I_p < I_1 + I_2$$

$$I_p = \langle (\xi_1(t) + \xi_2(t)) \cdot (\xi_1^*(t) + \xi_2^*(t)) \rangle_t = \langle \xi_1 \cdot \xi_1^* \rangle_t + \langle \xi_2 \xi_2^* \rangle_t + \langle \xi_1 \xi_2^* + \xi_1^* \xi_2 \rangle_t$$

$$= I_1 + I_2 + 2\mathrm{Re}\langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t$$

Вообще: $I_p = I_1 + I_2 + 2\mathrm{Re}\langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t$

Если $\mathrm{Re}\langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t = 0$, то $I_p = I_1 + I_2$ интерференции нет

Если $\mathrm{Re}\langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t \neq 0$, то $I_p \neq I_1 + I_2$ интерференция есть

Интерференция квазимонохроматических волн

$$\xi_1(t) = a_1 e^{i(\omega t + \varphi_1(t))}$$

$$\xi_2(t) = a_2 e^{i(\omega t + \varphi_2(t))}$$

Идеи: $\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial t} T \ll \varphi_{1,2}$ - изменение фазы мало за период.

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\mathrm{Re}\langle a_1 a_2 e^{i(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))} \rangle_t$$

$$2 a_1 a_2 \langle \mathrm{Re}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \rangle_t ;$$

$$2 a_1 a_2 \langle \cos\Delta\varphi \rangle_t \quad ; \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Квазимонохроматические волны:

$$I_p = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\langle \cos\Delta\varphi(t) \rangle_t$$

$$\langle \cos\Delta\varphi(t) \rangle_t = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \Phi(\varphi_1, \varphi_2)$$

← распределение Фазы

Если $\varphi_{1,2}(t)$ - статистически независимы.

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1) \cdot \Phi(\varphi_2) \quad ; \quad \Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\langle \cos\Delta\varphi(t) \rangle_t = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

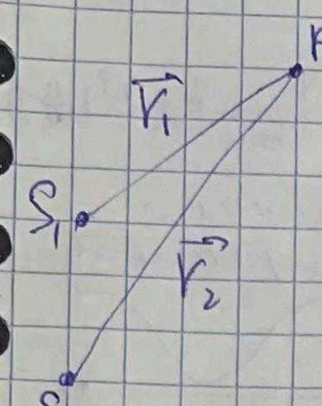
Резюме: интерференции нет, волны не когерентны или стат. независимы

Колебания когерентны, если разность их фаз постоянна во времени, и при сложении колебаний получается колебание той же частоты

12.2. Когерентность волн и видимость интерф. картины. Степень когерентности

Связь распределения интенсивности в интерф. картине и степени когер

Введем меру когерентности:



Монохроматические

$$\xi_{1S} = a_1 e^{i\omega t}\ ;\ \xi_{2S} = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\xi_{1P} = a_1 e^{i\omega\left(t - \frac{r_1}{c}\right)} = a_1 \cdot e^{i\omega(t-t_1)} = \xi_{1S}(t-t_1)$$

$$\xi_{2P} = a_1 \cdot e^{i\omega(t-t_2)} = \xi_{2S}(t-t_2)$$

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \xi_1 \xi_2^* \rangle_t = I_1 + I_2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\,\langle \xi_{1S}(t-t_1)\cdot \xi_{2S}^*(t-t_2)\rangle_t}$$

$t - t_2 = t'$

$t - t_1 = t' + \tau$

$$2\,\mathrm{Re}\,\langle \xi_{1S}(t'+\tau)\,\xi_{2S}^*(t')\rangle_t$$

$\Gamma_{12}(t', \tau)$

$\tau = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c}$ – запаздывание во времени первой волны относительно второй.

Вообще $I_P = I_1 + I_2 + 2\,\mathrm{Re}\,\Gamma_{12}(\tau)$, где $\Gamma_{12}(\tau) = \langle \xi_1(t+\tau)\cdot \xi_2^*(t)\rangle_t$ ← ф-я взаимной корреляции

Или: $I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\,\gamma_{12}(\tau)$, где $\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}}\Gamma_{12}(\tau)$ – степень когерентности

При наложении частично когерентных волн уменьшается контраст интерф. картины

Если $\mathrm{Re}\,\gamma_{12}(\tau) > 0$, то $I_P > I_1 + I_2$ – максимум

$\mathrm{Re}\,\gamma_{12}(\tau) < 0$, то $I_P < I_1 + I_2$ – минимум

Квазимонохроматические волны:

$$\xi_1(t) = a_1(t)\cdot e^{i\omega t}\ ;\ \xi_2(t) = a_2(t)\cdot e^{i\omega t}\ ;\ \frac{\partial a_{1,2}}{\partial t}\,T << a_{1,2}$$

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\,\gamma_{12}(\tau)$$

$$I_1 = a_1^2$$

$$\mathrm{Re}\,\gamma_{12}(\tau) = \mathrm{Re}\,\frac{\langle \xi_1(t+\tau)\,\xi_1^*(t)\rangle_t}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty a_1(t+\tau)\,e^{i\omega(t+\tau)}\cdot a_2(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty a_1(t+\tau)\,a_2(t)\,dt \cdot e^{i\omega\tau}$$

$$|\gamma_{12}(\tau)|$$

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(\tau)|\cdot \underbrace{\mathrm{Re}\,e^{i\omega\tau}}_{\cos\omega\tau\,=\,\cos\Delta\varphi}$$

$$\omega\tau = \Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \omega\left(\frac{r_2 - r_1}{c}\right) = \omega\frac{\delta}{c} = k\delta$$

Если $\omega\tau = \Delta\varphi = 2m\pi$ или $\delta = 2m\frac{\lambda}{2}$, то $\cos\Delta\varphi = +1$ – максимум

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma(\tau)|$$

Если $\omega\tau = \Delta\varphi = (2m+1)\pi$; $\delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ – минимум

$$I_P = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma(\tau)|$$

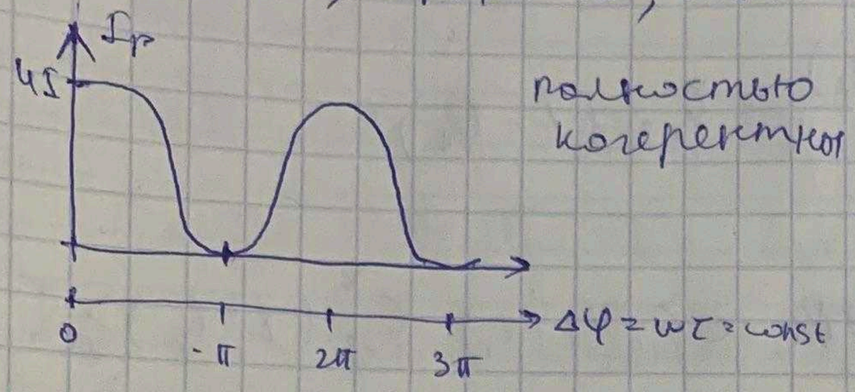
Пусть $I_1 = I_2 = I$ - у интерферирующих волн ровная и одинаковая интенсивность. Тогда

$$I_p^{max} = 2I(1 + |\gamma(\tau)|) \; ; \; I_p^{min} = 2I(1 - |\gamma(\tau)|)$$

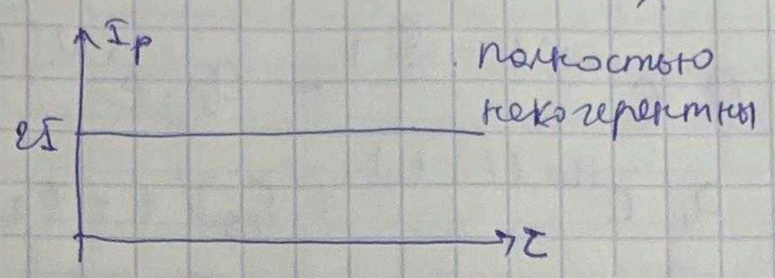
$$V(\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |\gamma(\tau)| \; - \text{видимость интерференционной картины (контраст)}$$

Примеры:

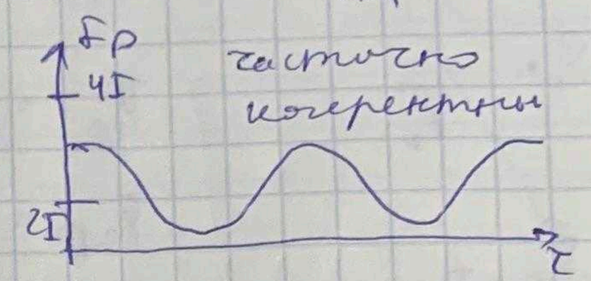
$|\gamma(\tau)| = 1$; $I_{max} = 4I$; $I_{min} = 0$;



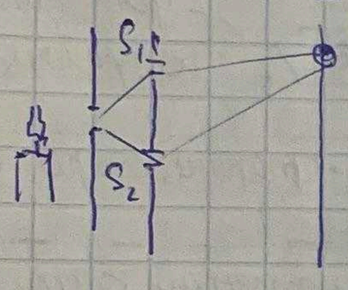
$|\gamma(\tau)| = 0$; $I^{max} = I^{min} = 2I$;



$0 < |\gamma(\tau)| < 1$, $I_{max\,min} = 2I(1 \pm |\gamma|)$



12.3 Время когерентности. Время когерентности и длительность цуга спонтанного излучения атома. Длина когерентности и ширина спектра излучения



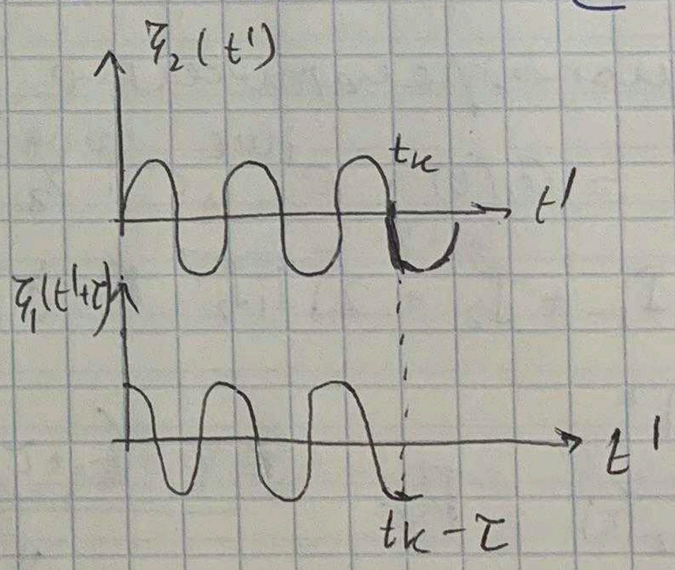
S_1 и S_2 когерентны, интерференция есть.

$$\xi_{1S} = a_1(t) e^{i\omega t} \; , \; \xi_{2S} = a_2(t) e^{i\omega t_2} \qquad t - t_2 = t'$$

$$\xi_{1p} = a_1(t' + \tau) \cdot e^{i\omega(t' + \tau)} \; ; \qquad t - t_1 = t' + \tau$$

$$\tau = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c} = \frac{S_2 p - S_1 p}{c}$$

$$\xi_{2p} = a_2(t') \cdot e^{i\omega t'}$$

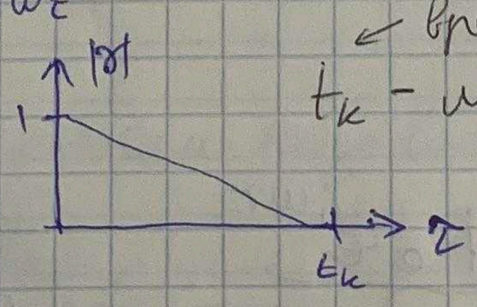


$$\gamma(\tau) = \left\langle \frac{\xi_1(t' + \tau) \cdot \xi_{2p}^*(t')}{\sqrt{I_1 I_2}} \right\rangle_t \; - \text{степень когерентности}$$

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \cdot \frac{1}{t_к} \int_0^{t_к} \underbrace{a_1(t' + \tau) \cdot a_2(t')}_{a_1 a_2 (t_к - \tau)} \cdot dt \cdot e^{i\omega\tau} =$$

$$= \frac{t_к - \tau}{t_к} \cdot e^{i\omega\tau} = \left(1 - \frac{\tau}{t_к}\right) \cdot e^{i\omega\tau}$$

$$|\gamma(\tau)| = 1 - \frac{|\tau|}{t_к}$$



$t_к$ - время когерентности

максимальное время запаздывания при котором присутствует интерференция

Длина когерентности

$L_{ког} = \delta = \tau_{ког} \cdot c$ - макс δ при которой интерференция есть. - длина цуга образующегося в процессе излучения одного атома

δ ← запаздывание 1 относительно 2.

разность хода

$$\Delta\omega \cdot t_к = 2\pi \Rightarrow \qquad \Delta\omega = \frac{2\pi}{t_к} = \frac{2\pi}{\tau_{ког}}$$

$$\omega = k \cdot c = \frac{2\pi}{\lambda} c$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda c \; , \text{ где } \Delta\lambda - \text{разность длин волн в цуге}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda^2} \cdot c\Delta\lambda = \frac{2\pi}{\tau_{ког}} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c \cdot \tau_{ког}}$$

$$\Rightarrow L_{ког} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

12.4 Теорема Винера-Хинчина. Понятие о Фурье-спектроскопии. Влияние шага измерений и длины волны (?)

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle \xi_1(t+\tau)\,\xi_2^*(t)\rangle_{ans}$$

$$\xi_1(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega')\, e^{i\omega'(t+\tau)}\, d\omega'$$

$$\xi_2^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_2^*(\omega'')\cdot e^{-i\omega'' t}\, d\omega''$$

$$\Gamma_{12}(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, d\omega'' \langle S_1(\omega')\cdot S_2^*(\omega'')\rangle e^{i(\omega'-\omega'')t}\, e^{i\omega'\tau}$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, G(\omega')\, e^{i\omega\tau} d\omega'$$

$G(\omega) = 2\pi\, S(\omega)\, S^*(\omega)$ - спектральная плотность энергии - энергия, которую содержит непрерывное множество гармоник в единичной полосе частот вблизи частоты ω

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{12}(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

Таким образом т. Винера-Хинчина устанавливает связь между функцией взаимной корреляции и спектральной плотностью энергии сигнала!

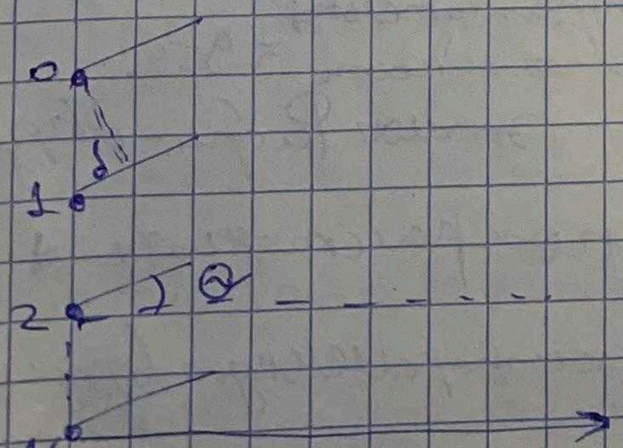
Фурье спектроскопия - метод измерения спектра по функции взаимной корреляции

Исследуемое излучение → [Интерферометр Майкельсона] → $\Gamma(\tau)$ → [Компьютер] → $G(\omega)$

↙ Вычислитель увеличивает резкость интерф. картины

13.1-13.2 Многолучевая интерференция волн от цепочки синфазных источников. Ширина главных максимумов. Разрешающая способность. Антенная решетка. Угловое разрешение. Диаграмма направленности и её сканирование

Рассмотрим цепочку (антенну) из N синфазных гармонических излучателей:



$$\varphi = k\delta = k d \sin\Theta$$

$$\xi_0(x,t) = a e^{i(\omega t - kx_0)}$$

$$\xi_1(x,t) = a e^{i(\omega t - kx_0 - \varphi)}$$

$$\xi_n(x,t) = a e^{i(\omega t - kx_0 - \varphi n)}$$

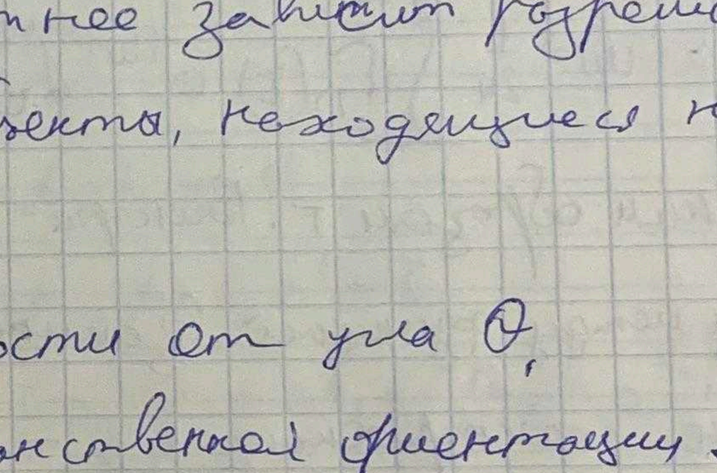
$$\xi_p(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} a e^{i(\omega t - kx_0 - \varphi n)} = a e^{i(\omega t - kx_0)} \cdot \sum_{n=0}^{N} e^{-i\varphi n} = a e^{i(\omega t - kx_0)} \cdot \frac{1 - e^{-i\varphi N}}{1 - e^{-i\varphi}} =$$

$$= a e^{i(\omega t - kx_0)} \cdot \frac{e^{-i\varphi\frac{N}{2}}}{e^{-i\varphi/2}} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi N}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$I_p = a^2 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

- $\frac{\varphi}{2} = \pi m \Rightarrow \varphi = 2m\pi \Leftrightarrow k\delta = 2m\pi \Rightarrow \delta = 2m\frac{\lambda}{2}$; $I_p = N^2 a^2 = N^2 I_0$ - максимум
- $\frac{N\varphi}{2} = \pi q$; $q = 1, 2 \ldots, N-1, N+1 \ldots (q = N \cdot p) \Rightarrow \delta = \frac{\lambda \cdot q}{N}$; $I_p = 0$ - минимум

Найдем угловую ширину главных максимумов!



$$\begin{cases} d \sin\Theta^+ = \frac{\lambda}{N} & \Theta^+ = \frac{\lambda}{Nd} \\ d \cdot \sin\Theta^- = -\frac{\lambda}{N} & \Theta^- = -\frac{\lambda}{Nd} \end{cases} \Rightarrow \Delta\Theta = \frac{\Theta^+ - \Theta^-}{2} = \frac{\lambda}{Nd}$$

$\Delta\Theta = \frac{\lambda}{Nd} = \frac{2\pi}{kNd} \Rightarrow \underbrace{(\Delta\Theta \cdot k)}_{\Delta k} \cdot \underbrace{(Nd)}_{\text{длина решетки}} = 2\pi$ - аналог теореме о минимуме частотных полос

Чем длиннее решетка, тем уже интерф. максимум

$\Delta\Theta$ - ширина диаграммы направленности. От нее зависит разрешающая способность, т.е возможность различать объекты, находящиеся на малом угловом расстоянии друг от друг

ΔH ← узкие/широко-направленные.

ΔH - графическая зависимость интенсивности от угла Θ,

Сканирование ΔH - процесс изменения пространственной ориентации ΔH антенной решетки: фазовое сканирование - изменения резкости фаз между излучателями, частотное сканирование - изменение длины в. или частоты

13.3 Спектральные приборы. Эталон Фабри-Перо

- приборы для исследования спектра оптического излучения
- Интерференционный спектральный прибор

Параллельность зеркальных поверхностей достигается при помощи распорного кольца (между ними)

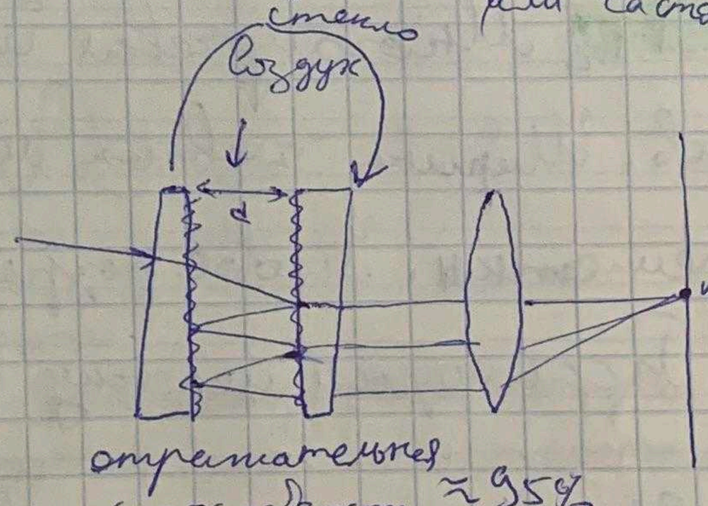
Интерферометр, в котором используются распорные кольца - эталон Фабри-Перо

С разными кольцами можно проводить измерения на разных расстояниях d

Интерферометр Ф-П - можно рассматривать, как плоскопараллельную воздушную пластинку

Интерференционная картина состоит из колец равного наклона

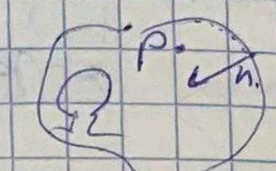
Интерф. максимум тем уже, чем больше отражательная способность зеркальных поверхностей пластинок интерферометра



Для спектральных исследований в оптической области спектра

14.1-14.3 Математическая формулировка задачи дифракции. Логика приближения в теории дифракции: ур. Гельмгольца, ин-л. Гельмгольца-Кирхгофа, условие излучения, приближения Кирхгофа. Формула Гельмгольца Кирхгофа

• Дифракция - явление, при котором наблюдается отклонение распространения волны от прямолинейного, которое нельзя объяснить преломлением или отражением.



Задача сводится к решению волнового ур-я: $\frac{\partial^2 \xi(\vec{r},t)}{\partial t^2} - C_0^2 \Delta \xi(\vec{r},t) = 0$; $r \in \Omega$

с граничными условиями, задаваемыми на экранах и поверхности препятствий, вызывающих дифракцию: $\xi(\vec{r},t)\big|_{r\in\Sigma} = \xi'(\vec{r},t)$;

$$\frac{\partial \xi}{\partial n}(\vec{r},t)\Big|_{r\in\Sigma} = f(\vec{r},t);$$

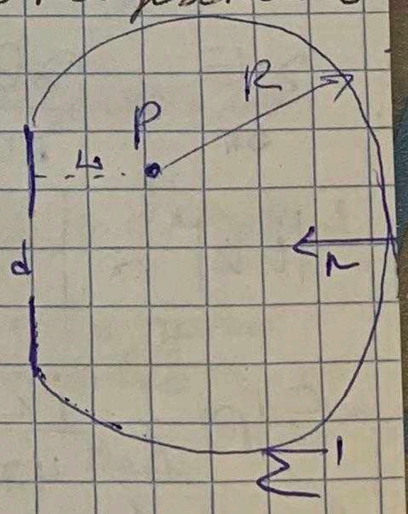
Волновое ур-е является линейным и для $\xi(\vec{r},t)$ справедливо разложение Фурье

$\xi(\vec{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\vec{r}) \cdot e^{i\omega_n t} \Rightarrow$ получаем ур-я Гельмгольца для амплитуды гармонических волн: $\Delta E_n + K_n^2 E_n = 0$, $K_n = \frac{\omega_n}{c_0}$

Применяя вторую ф-лу Грина получаем интегральную формулу Г-К для амплитуды $E(P)$ в точке наблюдения P: $E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\vec{\Sigma}$ *

где $G = \frac{1}{r}e^{-ikr}$ - ф-я Грина для точечного источника

Для задачи о дифракции на экране с отверстием удобно рассмотреть поверхность Σ в виде полусферы с центром в этом отверстии

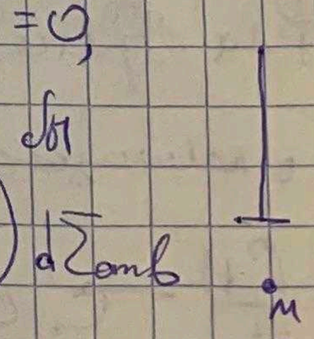


Усл-е излучения: для т.P вклад в интеграл (*) результата интегрирования по полусфере равен 0 при стремлении радиуса сферы к ∞

$\Rightarrow E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma_{экр+отв}}\left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\Sigma_{экр+отв}$

14.3

В соответствии с приближением Кирхгофа поле на экране = 0, а в отверстии совпадает с невозмущенным полем, которое было бы в отсутствии экрана $\Rightarrow E(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_{отв}}\left(E_S(M)\frac{\partial G(M)}{\partial n} - G(M)\cdot\frac{\partial E_S(M)}{\partial n}\right)d\Sigma_{отв}$



$E_S(M)$ - поле источника волны в точке интегрирования M, находящейся вне T

14.3-14.4 Приближения Кирхгофа в теории дифракции. Формула Гельмгольца-Кирхгофа. Оптическое приближение. Формула Френеля-Кирхгофа

① Для задачи о дифракции на экране с отверстием удобно рассмотреть поверхность Σ в виде полусферы с центром в этом отверстии

Условие излучения: для т. P вклад в интеграл результата интегрирования по полусфере равен 0 при стремлении радиуса сферы к ∞



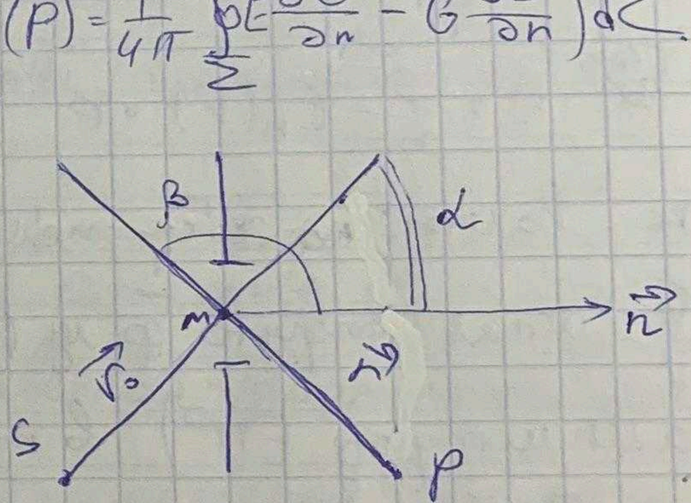
$$\Rightarrow E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma_{экр+отв}}\left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\Sigma_{экр+отв}$$

В соответствии с приближениями Кирхгофа поле на экране = 0, а в отверстии совпадает с невозмущенным полем, которое было бы в отсутствие экрана $\Rightarrow E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma_{отв}} E_s(M)\frac{\partial G(M)}{\partial n} - G(M)\frac{\partial E_s(M)}{\partial n}\Big)d\Sigma_{отв}$, где

$E_s(M)$ - поле источника волны в точке интегрирования M, находящейся в отверстии.

Ф-ла Г-К для амплитуды $E(P)$ в точке наблюдения P: $E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\Sigma$.

② Оптическое приближение $\lambda << r, r_0$



$E_s(M) = E_0\frac{e^{ikr_0}}{r_0}$ - комплексная амплитуда сферической волны, создаваемой точечным источником S в точке интегрирования M

$G(M) = \frac{e^{-ikr}}{r}$ - ф-я Грина для этой точки.

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r}\cos\beta = \frac{e^{ikr}}{r}\left(-ik - \frac{1}{r}\right)\cos\beta$$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = \frac{\partial E}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial n} = \frac{\partial E}{\partial r_0}\cdot\cos\alpha = E_0\cdot\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\left(-ik - \frac{1}{r_0}\right)\cdot\cos\alpha$$

$|ik| = \left|i\frac{2\pi}{\lambda}\right| >> \frac{1}{r}, \frac{1}{r_0} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial n} \simeq -ikG\cos\beta$; $\frac{\partial E}{\partial n} \simeq -ikE_s(M)\cos\alpha$

$E(P) = \frac{ik}{4\pi}\int_{\Sigma_{отв}} E_s(M)\,G(-\cos\beta + \cos\alpha)\,d\Sigma_{отв}$ - ф-ла Френеля Кирхгофа.

14.5 Ф-ла Френеля-Кирхгофа и принципы Гюйгенса-Френеля. Анализ дифракции на отверстии с помощью зоны Френеля, Пятно Пуассона

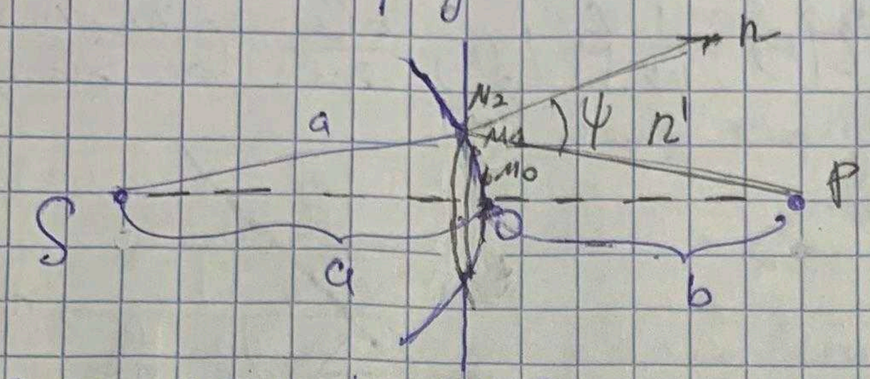
$\frac{\partial^2\xi(\vec{r},t)}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\xi(P,t) = 0 \xrightarrow{\text{Фурье}} \Delta E + k_n^2 E_n = 0 \xrightarrow{\text{2 ф. Грина}} E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\Sigma$

Условие излучения $\rightarrow E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma_{отв+экр}}\left(E\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\Sigma_{отв+экр} \xrightarrow{\text{приближения Кирхгофа}} E(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma_{отв}}\left(E_s(M)\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial E_s(M)}{\partial n}\right)d\Sigma_{отв} \longrightarrow$

оптическое приближение $\rightarrow E(P) = \frac{ik}{4\pi}\oint_{\Sigma_{отв}} E_s(M)\,G\,\underbrace{(\cos\alpha - \cos\beta)}_{K(\psi) = 1+\cos\psi}\,d\Sigma_{отв}$ - ф-ла Френеля Кирхгофа

• Принцип Гюйгенса-Френеля: Световое поле есть результат интерференции элементарных вторичных волн, испускаемых каждым элементом некоторой волновой поверхности.

• Френель предложил приближенный способ расчета дифракционных картин, основанных на представлении о так называемых зонах Френеля.



a - радиус сферы, $b \equiv OP$

Расстояния от границы зоны до точки наблюдения отличаются на половину длины волны

$M_0P = OP + \frac{\lambda}{2}$; $M_1P = M_0P + \frac{\lambda}{2}$; ....

$r_n = \sqrt{(n+1)\frac{ab\lambda}{a+b}}$ - внешний радиус n-ой зоны Ф

Смысл разбиения на зоны состоит в том, что разность фаз элементарных вторичных волн, приходящих в точку наблюдения от данной зоны, не превышает π. Сложение таких волн приводит к их взаимному усилению. Поэтому каждую зону Ф. можно рассматривать как источник вторичных волн, имеющих определенную фазу. Напротив, две соседние зоны действуют как источники, колеблющиеся в противофазе (по построению одно из двух колебаний запаздывает относительно другого на пол-волны)

$E(P) = \sum_{n=0}^{n} E_n$, $|E_{n+1}| < |E_n|$ поле представимо знакопеременным рядом

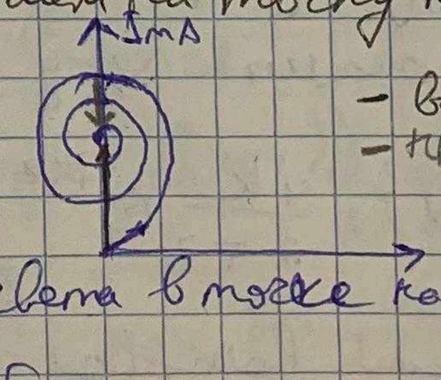
т.к K_n убывает - т.е по мере увеличения радиуса зоны её вклад уменьшается вследствие увеличения угла между n и n'

Вычисление результирующего светового поля сводится к суммированию световых колебаний, возбуждаемых элементарными вторичными волнами

ψ - угол между нормалью к поверхностью и направлением на точку наблюдения

Пятно Пуассона:

$A = a e^{i\varphi}$



1) Чем больше радиус диска, тем меньше интенсивность света в точке наблюдения

Но отличка от 0, даже в случае достаточно большом экрана - пятно не резко будет видно

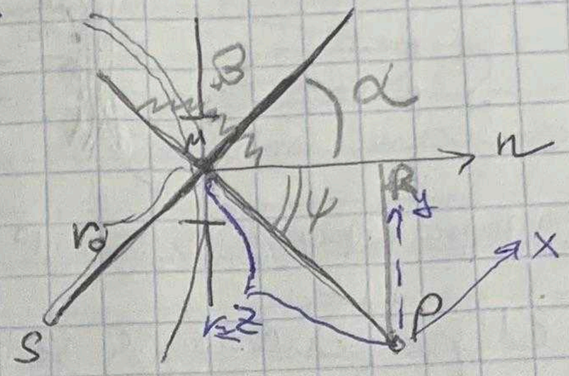
14.6 Дифракция Френеля. Параксиальное (приосевое) приближение. Параболическое ур-е дифр.

↖ описывает дифракцию слабосходящихся пучков света

Дифракция - явление при котором наблюдается отклонение распространения волн от прямолинейного, которое нельзя объяснить преломлением или отражением.

$$\frac{\partial^2 \xi(\vec{r},t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta \xi(\vec{r},t) = 0 \xrightarrow{\text{Фурье}} \Delta E + k_n^2 E_n = 0 \xrightarrow{\text{2-я ф Грина}} E(P) = \frac{1}{4\pi} \oint \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Sigma$$

Условие излучения $\rightarrow$ $E(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_{отв+экр}} \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) d\Sigma_{отв+экр}$ $\xrightarrow{\text{приближение Кирхгофа}}$ $E(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_{отв}} \left(E_s(M) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_s(M)}{\partial n} \right) \Sigma_{отв}$



$MP = z$

$\xrightarrow{\text{отлич. приближ}}$ $E(P) = \frac{ik}{4\pi} \oint_{\Sigma_{отв}} E_s(M) G (\cos\alpha - \cos\beta) d\Sigma_{отв}$ ф-ла Френеля Кирхгофа

В приближении Френеля размер b отверстия (препятствия) на которых происходит дифракция, и смещение R_p от оси в плоскости наблюдения малы по сравнению с продольными масштабами b, $R_p \ll r_0, r, z$. Тогда $\alpha \approx 0$, $\beta \approx \pi \Rightarrow \cos\alpha \approx 1$, $\cos\beta \approx -1$

$$E(P) \equiv E(x,y,z) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{отв}} E_s(x',y') (\cos\alpha - \cos\beta) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} dx'dy'$$

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}$$

$$\frac{1}{r} \simeq \frac{1}{z}$$

Для фазы kr в e^{-ikr}:

$$r \simeq z\left(1 + \frac{(x-x')^2}{z^2} + \frac{(y-y')^2}{z^2}\right)^{1/2}$$

$$r \simeq z\left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z^2} + \frac{(y-y')^2}{2z^2}\right)$$

$$E(x,y,z) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Sigma_{отв}} E_s(x',y',0) \cdot 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{-ikz\left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z^2} + \frac{(y-y')^2}{2z^2}\right)} dx'dy' -$$

амплитуда дифрагировавшей волны $E(x,y,z)$ в точке P, определяемой координатами x, y в плоскости наблюдения z

$$E(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{\Sigma_{отв}} E_s(x',y',0) \cdot e^{-\frac{i(x-x')k}{2z}} \cdot e^{-i\frac{(y-y')k}{2z}} \cdot dx'dy'$$

$e^{-\frac{i(x-x')^2 k}{2z}}$

Сферический волновой фронт приближается параболическим

$E(x,y,z) = A(x,y,z) \cdot e^{-ikz}$, где

$$A(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{\Sigma_{отв}} A(x',y',z=0) \cdot e^{-\frac{ik}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx'dy'$$

(- амплитуда, комплексная)

Для комплексной амплитуды $A(x,y,z)$ справедливо параболическое ур-е дифракции

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \Rightarrow \text{Решение: } A(x,y,z) = \frac{A_0}{a_0} a(z) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2a(z)^2}} \cdot e^{-i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}}$$

14.7 Эф

- эф

перио

напр

Δ (

$\Rightarrow$

г.к.

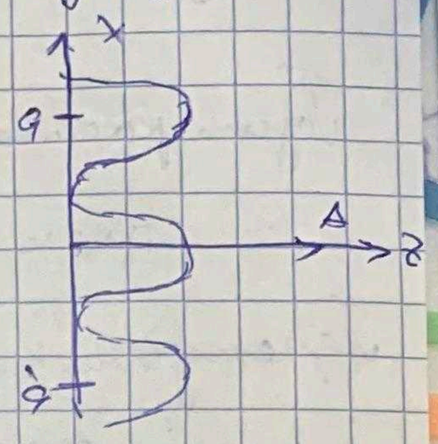
$\Rightarrow$

2

По

14.7 Эффект Тальбо. Расстояние Тальбо для одномерных структур.

- эффект дифракционного самовоспроизведения светового поля с периодической модуляцией амплитуды в плоскости, перпендикулярной направлению распространения



$A(x \pm sa, z=0) = A(x, z=0)$ - периодическая модуляция

=> разложение комплексной амплитуды в спектр Фурье

т.к. $A(x \pm sa, z=0) = A(x, z=0)$, то при $\forall z$: $A(x \pm sa, z) = A(x, z)$

$$\Rightarrow A(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \cdot e^{i \frac{2\pi n}{a} \cdot x}$$, где a - период пространственной модуляции

$\frac{2\pi n}{a}$ - частота пространственного спектра Фурье

Подставим в параболическое уравнение дифракции $2ik \frac{\partial A(x,z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2ik \frac{dA_n}{dz} e^{i \frac{2\pi}{a} n x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z) \cdot \left(-\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2\right) e^{i \frac{2\pi}{a} n x}$$ => Перейдем к системе ΦY_n гармоники Фурье ортогональны

$$2ik \frac{dA_n(z)}{dz} + n^2 \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 A_n(z) = 0, \quad n = 0, \dots \infty$$

$$A_n(z) = A_n(0) \cdot e^{-\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 \cdot \frac{z}{2ik}} \Leftrightarrow A_n(z) = A_n(0) \cdot e^{i\varphi_n(z)}, \quad \varphi_n = \left(\frac{2\pi}{a} n\right)^2 \cdot \frac{z}{2k}$$

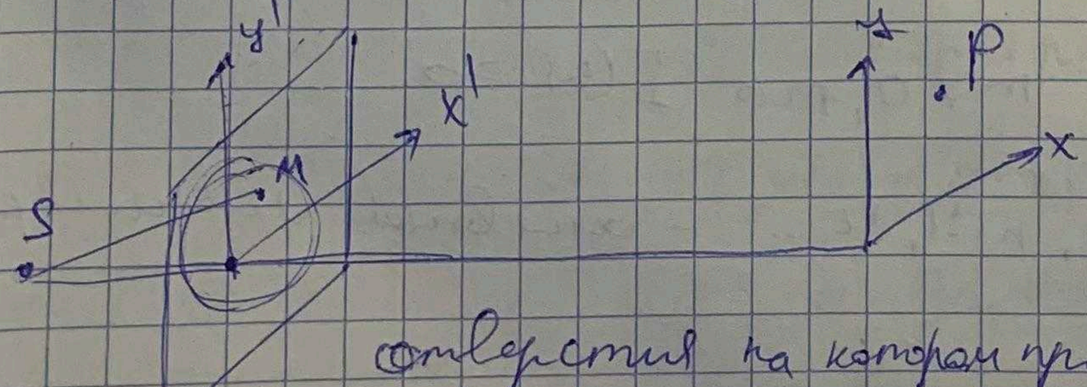
$\varphi_n = \frac{\pi}{a^2} \lambda n^2 \cdot z$ - дифракционный набег фазы $\varphi_n(z)$, которой приобретает n-ая гармоника пространственного спектра, пропорционален квадрату её номера n.

Существует расстояние z_T, на котором все амплитуды $A_n(z)$ спектра приобретают набег фазы, кратный 2π: $2\pi n^2 = \frac{\pi}{a^2} \cdot \lambda n^2 z_T \Rightarrow z_T = \frac{2a^2}{\lambda}$

Тогда $A_n(x, z_T) = A_n(x, z=0)$ - т.е. на расстоянии Тальбо амплитуды $A(z = z_T)$ гармоник спектра оказываются равными своим значениям при $z = 0$

а это и означает, что на расстоянии Тальбо световое поле $\xi(x, z_T, t)$ в монохроматической волне восстанавливается

15.1 Дифракция Фраунгофера (дифракция плоских волн). Угловой спектр плоских волн



$\max\{(x^2 - y^2)^{1/2}\}, \max\{(x^2 + y^2)^{1/2}\} << z$

т.е. в приближении Френеля размер D отверстия на котором происходит дифракция и смещение от оси в плоскости наблюдения малы по сравнению с продольными масштабами

В соответствии с принципом Гюйгенса, амплитуду $E(x, y, z)$ можно представить следующим образом: $E(x, y, z) = A(x, y, z) \cdot e^{ikz}$, где $A(x, y, z)$ - комплексная амплитуда

$$A(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z}\int_{\Sigma отв} A(x',y')\, e^{-\frac{ik}{2z}\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]}\,dx'dy' \iff$$

$$A(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z}\, e^{-\frac{ik}{2z}\left[x^2+y^2\right]}\int_{\Sigma отв} A(x',y')\cdot e^{-\frac{ik}{2z}\left[x'^2+y'^2\right]}\cdot e^{\frac{ik}{z}\left[xx'+yy'\right]}\,dx'dy'$$

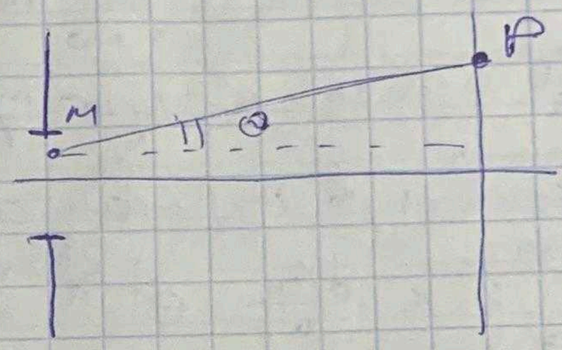
Пусть $\max\left\{k\left(\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\right\} << 1$

$\max\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x'^2+y'^2}{2z}\right)\right\} << 1$

Тогда $\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{D^2}{2z} << \pi \iff D << \sqrt{\lambda z} \Rightarrow$

Переходим к дифракции Фраунгофера: то есть если размер отверстия много меньше радиуса первой зоны Френеля $\left(r_n = \sqrt{n\frac{ab\lambda}{a+b}},\ a\to\infty \Rightarrow r_n = \sqrt{nab\lambda}\right)$

$$A(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z}\, e^{-\frac{ik}{2z}\left[x^2+y^2\right]}\int_{\Sigma отв} A(x',y')\cdot e^{\frac{ik}{z}\left[xx'+yy'\right]}\,dx'dy'$$



$S: \sin\Theta_x = \frac{x}{z} \Rightarrow z$-велико $\Rightarrow$ $\Theta_x = \frac{x}{z}$

$S: \sin\Theta_y = \frac{y}{z}$ $\Theta_y = \frac{y}{z}$

Тогда компоненты волнового вектора для волны, распространяющейся в точку наблюдения x, y, равны: $k_x = k\cdot\Theta_x$, $k_y = k\cdot\Theta_y$.

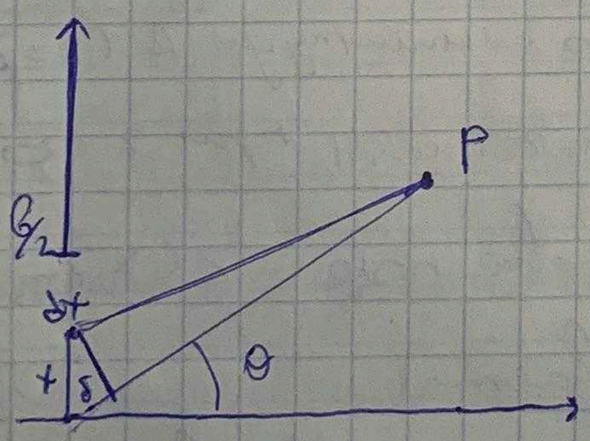
$$A(x,y,z) = A(k_x,k_y) = \frac{ik}{2\pi z}\, e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2z}}\int_{\Sigma отв} A(x',y')\cdot e^{i(k_x x'+k_y y')}\,dx'dy'$$

пространственный спектр амплитуды $A(x',y')$

$A(\Theta_x,\Theta_y)$ ~ угловой спектр амплитуд $A(x',y')$

$\sim$ - пропорционален

15.2 Дифракция на щели, прямоугольном и круглом отверстиях. Дифракционная расходимость



$$dA = A_0\cdot\frac{dx}{b}\, e^{ik\delta} \Rightarrow A(\Theta) = \int dA\Theta = \frac{A_0}{b}\int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx\sin\Theta}\,dx =$$

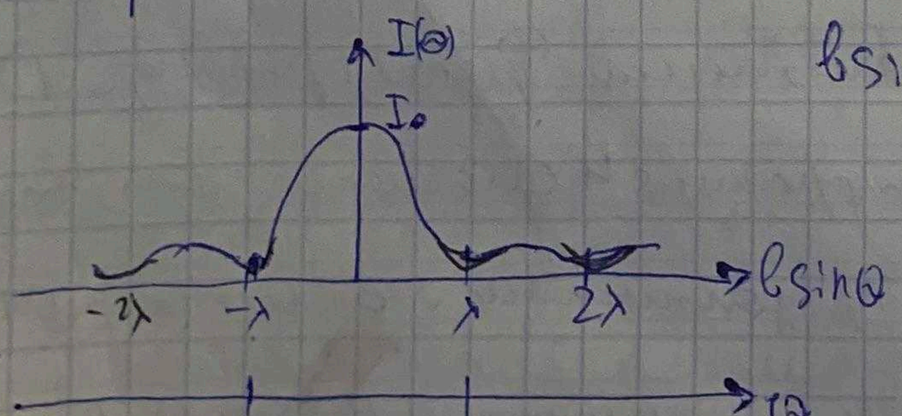
$$= \frac{A_0}{bik\sin\Theta}\underbrace{\left[e^{ik\frac{b}{2}\sin\Theta} - e^{-ik\frac{b}{2}\sin\Theta}\right]}_{2i\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\Theta\right)} = A_0\cdot\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\Theta\right)}{\frac{kb}{2}\cdot\sin\Theta}$$

$\delta = x\cdot\sin\Theta$

Распределение интенсивности: $I(\Theta) = I_0\cdot\mathrm{sinc}^2\left(\frac{kb}{2}\sin\Theta\right)$

$-b/2$ — падение плоской волны на щель

$\frac{kb}{2}\sin\Theta = m\pi$, $m\neq 0$, то $I(\Theta) = 0$



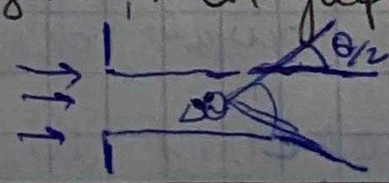
$b\sin\Theta = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — условие минимума

угловая ширина центрального максимума

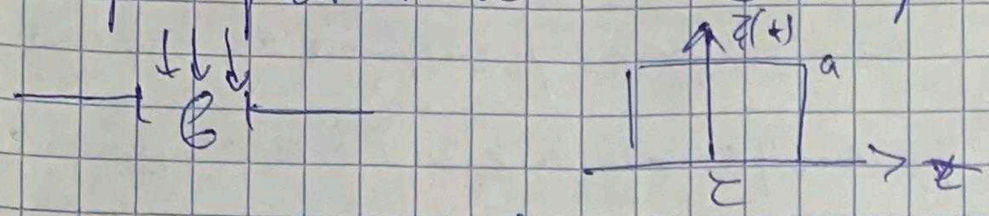
Дифракционная расходимость:

$\Delta\Theta = \frac{1}{2}\left(\Theta^{+} - \Theta^{-}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b} - \left(-\frac{\lambda}{b}\right)\right) = \frac{\lambda}{b}$ — угол дифр расходимости

Чем уже щель, тем дифракционная расх-ть больше



15.3 Пространственно-временная аналогия, частотный спектр импульса и пространственный спектр при дифракции Фраунгофера на щели. Теорема спектра



$$I(\Theta) = I_0 \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{kb\sin\Theta}{2}\right) \longleftrightarrow I(\omega) = \left(\frac{a\tau}{2\pi}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

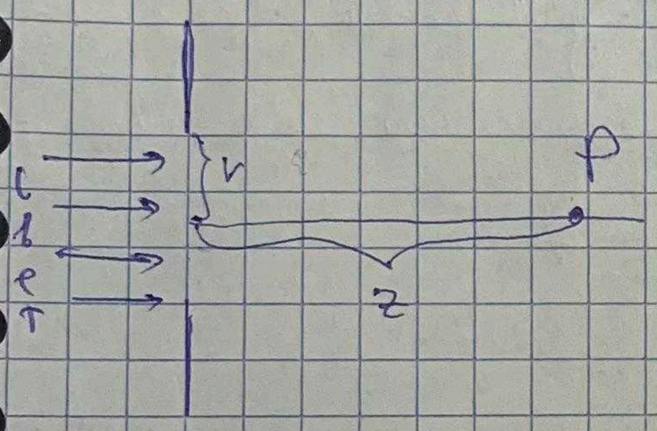
$I(\Theta) = I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{kb\Theta}{2}\right)$ ← размер щели

$\Delta\Theta = \frac{\lambda}{b}$ – угл. дифр. расх-ти $b \leftrightarrow \tau$

$k\Delta\Theta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{b}$ $\qquad k_0 = k\Theta \leftrightarrow \omega$

$\Delta k \cdot b = 2\pi \Leftrightarrow \Delta\omega\tau = 2\pi$

15.4 Ближняя и дальняя зоны дифракции. Приближение геометрической оптики. Число зон Френеля в отверстии для различных приближений теории дифракции



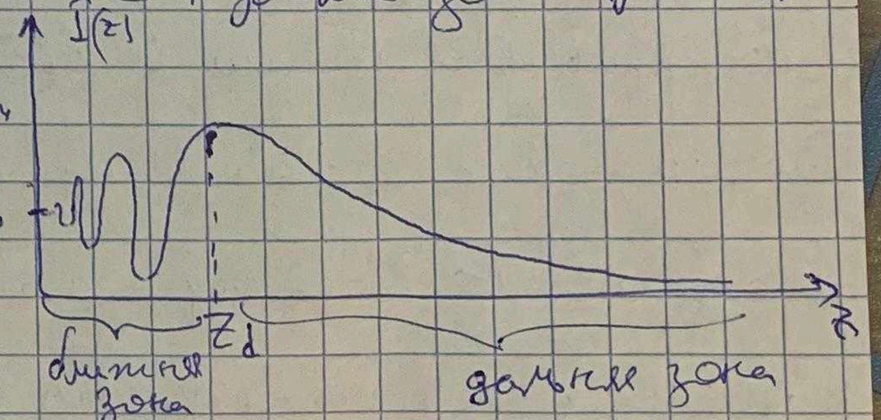
Если расстояние z – фикс, то $r_n = \sqrt{(n+1)\lambda z}$

Пусть теперь r – фикс. Тогда по мере удаления от экрана, периферийные зоны Френеля начнут выходить одна за другой за пределы отверстия, пока в пределах отверстия не останется одна нулевая зона Френеля. В этом моменте интенсивность света I в точке наблюдения достигает максимума, после чего монотонно убывает с ростом расстояния z.

z_d – расстояние при котором отверстие совпадает с нулевой зоной Френеля

Зона, для которой $z \ll z_d$ – ближняя зона дифракции

В этой зоне интенсивность света на оси пучка примерно равна интенсивности исходной световой волны.



Поперечный профиль пучка поддерживается постоянным за счет интерференции элементарных вторичных волн, идущих от разных зон Френеля

Зона, для которой $z \gg z_d$ – дальняя зона дифракции (световой пучок расширяется)

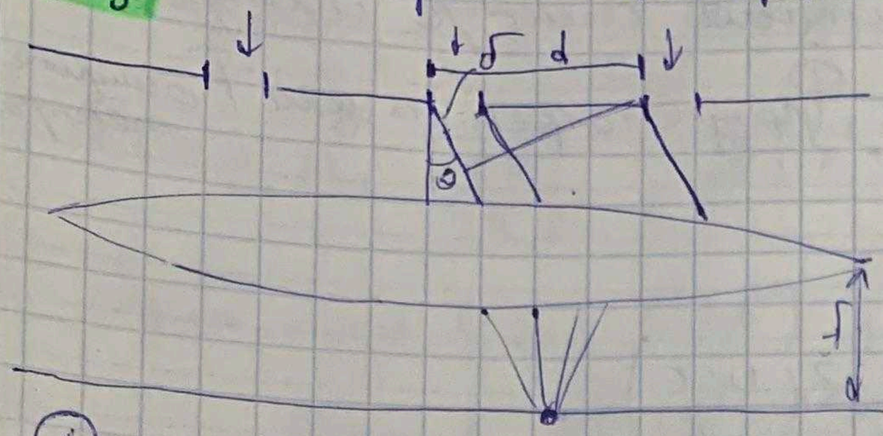
Интерференция элем. вторичных волн слабее, пучок становится расходящимся

$z_d = r^2/\lambda \Rightarrow N_F = \frac{r^2}{\lambda z} = \frac{z_d}{z} \Rightarrow$ В ближней зоне $N_F \gg 1$ – приближение Г.О., В дальней зоне $N_F \ll 1$ – приближение Фраунгофера

$N_F \sim 1 \div 10$ – Дифракция Френеля

$D \gg \sqrt{\lambda r}$

15.5 **Дифракционная решетка. Основные минимумы, главные максимумы и их ширина. Дифр. спектры**



В решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света исходящих от щелей решетки при её освещении. Дифр. картина наблюдается в фокальной плоскости линзы

Для дифракционной решетки: $I(\Theta) = I_в(\Theta) \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$, $\varphi = kd\sin\varphi$

Для одной щели: $I_в = I_0 \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{kb\sin\Theta}{2}\right)$

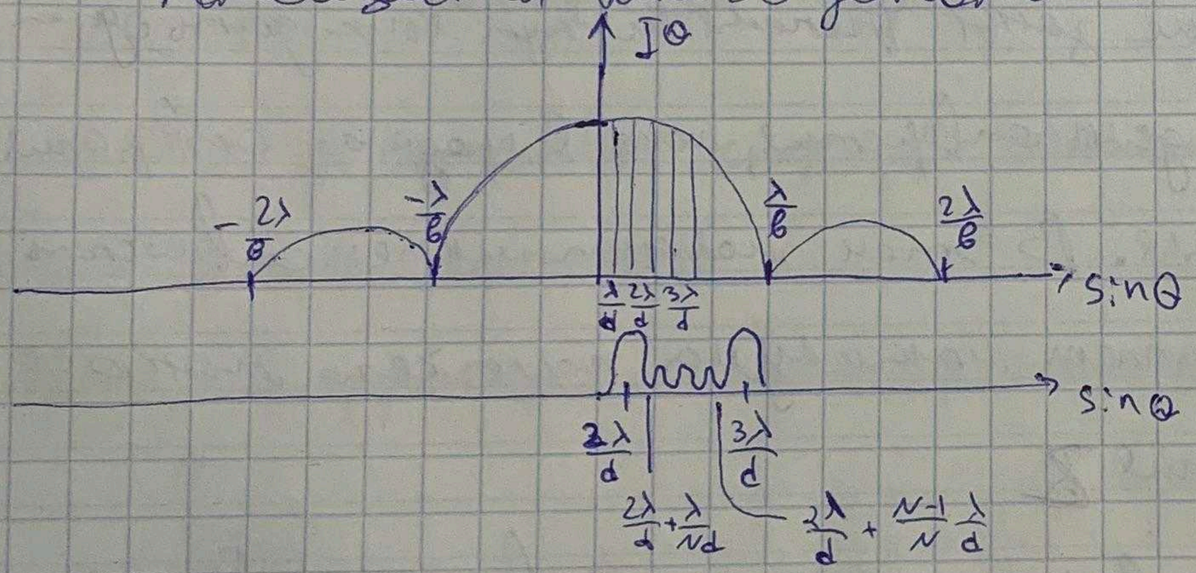
1) $I_в(\Theta) = 0$ при $\frac{kb\sin\Theta}{2} = \pi m$, $m = \pm1, \pm2 \Leftrightarrow b\sin\Theta_m = \lambda m$ – основной минимум

2) $\frac{\varphi}{2} = \pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2 \ldots \Rightarrow kd\sin\Theta_n = 2\pi n \Rightarrow d\sin\Theta_n = n\lambda \Leftrightarrow I(\Theta_n) = N^2 I_0$

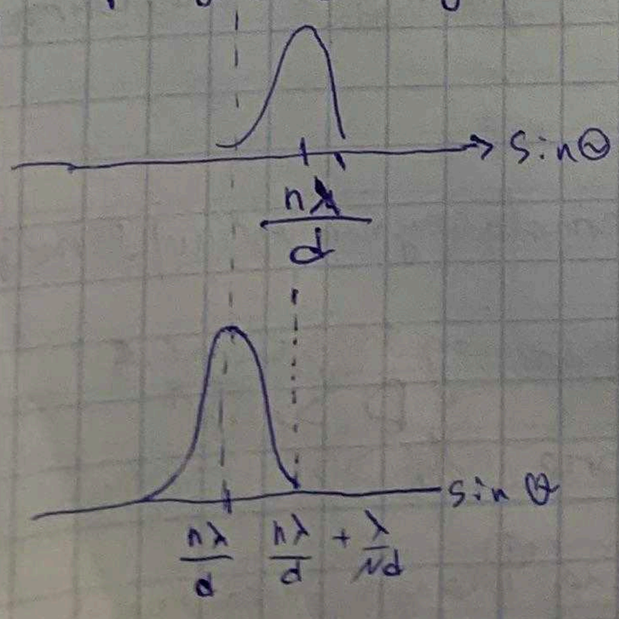
– главный максимум

3) $\frac{N\varphi}{2} = \pi q$, $q \neq Np \Rightarrow d\sin\Theta_p = \lambda p \Leftrightarrow I(\Theta_q) = 0$ – минимум

Так как $b < d$, то между основными минимумами укладывается несколько главных максимумов. Число щелей $N \gg 1$, и между главными максимумами помещается много дополнительных минимумов



Спектральные линии с близкими длинами волн λ и λ' считаются разрешенными, если главный максимум дифр. картины для одной длины волны совпадает по своему положению с первым дифр. минимумом в том же порядке для другой волны:

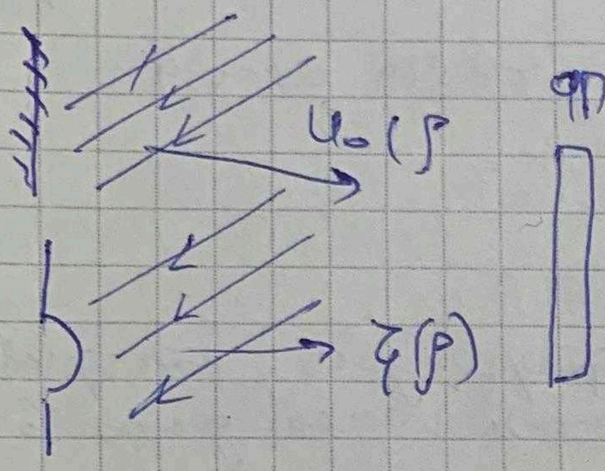


$$n\frac{\lambda}{d} + \frac{\lambda}{Nd} = \frac{n\lambda'}{d} \Rightarrow \frac{\lambda}{N} = n(\lambda' - \lambda)$$

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nn} = \frac{1}{R}$$, где R – разрешающая способность.

15.7 Голография. Принцип записи и восстановление голографических изображений. Роль когерентности света при записи голограмм

Голография - метод регистрации информации, основанный на интерференции волн. В каком случае: идея бездифракционного получения оптических изображений. путем восстановления волнового фронта

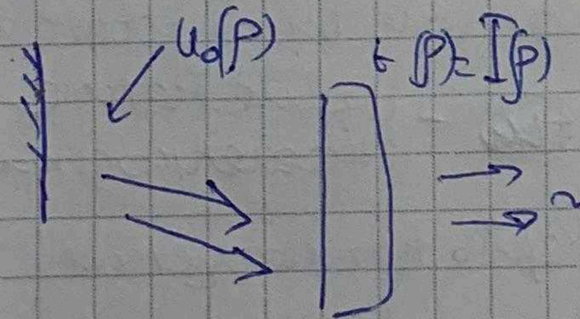


$I \sim |(U_0\rho) + \xi(\rho)|^2$

- Предмет освещается пучком параллельных лучей от лазера Рассеянные лучи попадают на фотопластинку Г
- По степени почернения пластинки после проявления можно судить об амплитуде рассеянной волны во всех местах пластинки, которые эта волна достигла

Для восстановления волнового поля нужна еще информация о фазе, которую можно записать на той же ФП, если осветить ее вторым пучком от того же лазера и заставить его интерферировать с пучком, рассеянным предметом

- Полученная интерференционная картина называется голограммой и содержит полную инф-ю об амп. и фазах рассеянной волны (этого достаточно)
- Так как разность хода между рассеянной волной и опорной очень велика и может достигать нескольких метров когерентность должна быть большой



поле с комплексной амплитудой

Голограмму просвечивают опорным пучком $U_0(\rho)$, который применялся при изготовлении

Этот пучок будет испытывать дифракцию на голограмме, подобно тому как дифрагирует свет на дифракционной решетке

$$\dot{\xi}(\rho) = t(\rho)\cdot U_0(\rho) = |U_0\rho) + \xi(\rho)|^2 \cdot U_0\rho) = \underbrace{(|U_0|^2 + |\xi|^2)U_0}_{\text{фон}} + \underbrace{2|U_0(\rho)|^2 \xi(\rho)}_{\text{мнимое}} + 2|U_0(\rho)|^2 \xi^*(\rho)$$

действительное

волна пропорциональная волне $\xi(\rho)$

16.1, 16.2 Излучение атома, Модель Томсона, Атом Бора. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучение

Модель Томсона - модель атома, согласно которой атом имеет форму шара, положительный заряд которого распределен равномерно по всему объему, а отрицательно заряженные электроны находятся внутри него, причем их суммарный заряд равен положит. заряду шара

Ф-ла Релея $W_\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2$ - плотность энергии, которую излучает атом

$W = \int_0^\infty W_\omega d\omega$ - полная объемная плотность

Ф-ла Планка $W_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$ - интерполяционная формула, которая при малых частотах переходит в Ф-лу Релея

Атом Бора - модель атома на основе планетарной модели Резерфорда с допущением, что $\bar{e}$ в атоме могут двигаться по определенным

W_2 ——— орбиталям, находясь на которых они не излучают энергию, а излучение или поглощение происходит при переходе с одной

W_1 ——— 1 энерг. уровня орбиты на другую: $\hbar\omega_{nm} = W_n - W_m$ - энергия при переходе

• С нижнего уровня на верхний переходы возможны только с поглощением кванта энергии (т.е. под влиянием излучения падающего на атом). Такие переходы называются вынужденными. Переходы с верхнего уровня на нижний могут быть как вынужденными, так и спонтанными, происходящими независимо от падающего на атом излучения

1) Вынужденное поглощение: $\frac{dN_m}{dt} = -A_{nm} N_m \cdot F_\omega$ - изменение населенности

где $F_\omega = \frac{W_\omega \cdot c}{\hbar\omega_{nm}}$ - кол-во падающих фотонов, A_{nm} - вер-ть поглощения

$F_\omega \cdot A_{nm}$ - сколько фотонов поглотится

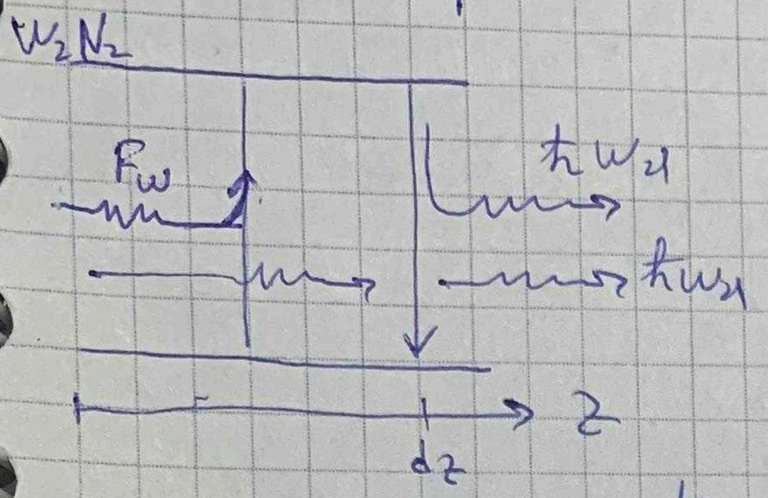
2) Вынужденное излучение: $\frac{dN_n}{dt} = -A_{mn} \cdot N_n \cdot F_\omega$ ($A_{mn} = A_{nm} = A$)

3) Спонтанное излучение: $\frac{dN_n}{dt} = -B_{nm} \cdot N_n \cdot dt$

Вынужденное излучение обладает тем же направлением распространения и фазой, что и вынуждающее. Переход излучения

$P_n \sim e^{-\frac{W_n}{kT}}$

16.3. Когерентное усиление, обратная связь, условие генерации. Принципы работы и схема лазера. Свойства лазерного излучения.



F_w - количество падающих фотонов ($= c N_w$)

$$W_{21} = \frac{W_2 - W_1}{\hbar}$$

Считаем, что свет распространяется вдоль оси Oz

$$dN_w = |dN_2| - |dN_1|$$

$dN_2 = -A F_w N_2 dt$ - вынужденное излучение

$dN_1 = -A F_w N_1 dt$ - вынужденное поглощение

$$dN_w = A F_w N_2 dt - A F_w N_1 dt$$

$$\frac{dN_w}{dt} = A F_w (N_2 - N_1) \quad > 0, \text{ если } N_2 > N_1$$

$N_n \sim e^{-\frac{W_n}{kT}}$ - в состоянии термодинамического равновесия концентрации атомов описываются распределением Больцмана

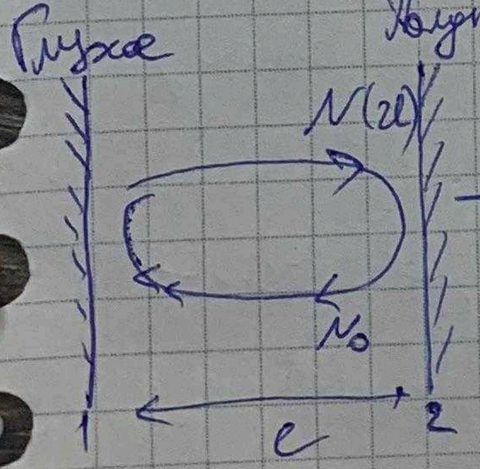
т.к. $W_2 = W_1 + \underbrace{W_{21}\hbar}_{\text{энергия при переходе}}$, то $N_2 < N_1$ в равновесии

Ц-плотность потока по мере прохождения света в среде уменьшается

Среда с $W_2 > W_1$, в которой $N_2 > N_1$ называется активной, неравновесной, инверсной (Среда действует как усилитель светового потока)

ЛАЗЕР LASER - Light amplification by Stimulated Emission of Radiation

1) Активная среда для усиления. 2) Положительная обратная связь для генерации - открытый резонатор



Заполним пространство между пластинами Фабри-Перо активной средой. Между последовательными отражениями от зеркал при прохождении через активную среду свет. поток усиливается. Через 2 зеркало свет в определенной пропорции выходит из системы, отразив её излучение, на зовем лазерным

$$dN_w = (N_2 - N_1) A F_w dt; \quad dt = \frac{dz}{dc} \Rightarrow dN_w = (N_2 - N_1) A N_w dz$$

$$N_w(z) = N_w(0) \cdot e^{(N_2 - N_1) A z}$$

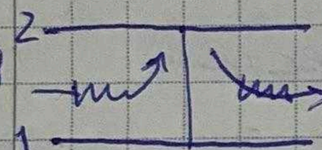
$$\Rightarrow \text{Условие генерации} \begin{cases} N_w(2\ell) = N_w(0) e^{(N_2 - N_1) A 2\ell} \\ N_w(2\ell) \cdot R \geq N_w(0), \quad R < 1 \\ R e^{(N_2 - N_1) A 2\ell} \geq 1 \end{cases}$$

Свойства лазерного излучения:

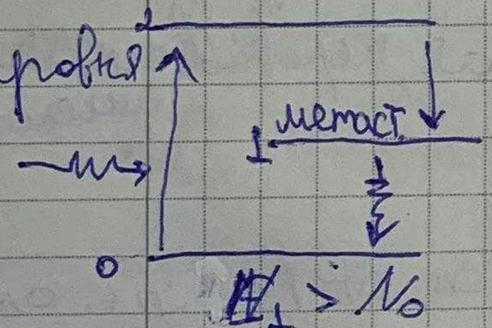
1) Оно когерентно, т.к. оно из-за стимулированного перехода
2) Направленное, т.к. обратная связь для излучения по оси
3) Высокая монохроматичность. $L = \frac{\lambda}{2} \cdot n$ => Волна выходя из 2 после прохождения туда и обратно сместится в 2 в так же фазе.

16.4-16.6 Схема лазерных уровней. Накачка. Типы лазеров и их характеристики. Применение лазеров. Управляемый термоядерный синтез

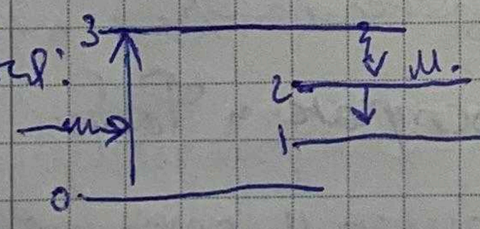
Накачка - процесс перекачки энергии внешнего источника в рабочую среду лазера. Поглощенная энергия переводит атомы рабочей среды в возбужденное состояние. Когда число атомов в возбужденном состоянии превышает кол-во атомов в основном состоянии, возникает инверсия населенности. В этом состоянии начинают действовать механизм вынужденного излучения и происходит излучение лазера.

2 уровня 

Если поглощение и вынужденное излучение происходят между 2 уровнями, то оба эти процесса протекают с одинаковой скоростью. Недостаточно для создания перенаселенности

3 уровня 

Атом переходит из основного состояния с энергией W_0 в возб. с энергией W_2. В этом состоянии он может находиться недолго и почти сразу происходит безизлучательный переход на W_1, на котором атом может находиться значительно дольше. Возникает возможность осуществления вынужденного излучения под воздействием других случайных фотонов. Как только атомов в метастабильном состоянии становиться больше, чем в основном, начинается процесс генерации

4 уровня: 

примерно то же самое: воздействуем на систему излучением большой мощности

1) Газовые лазеры: „He-Ne" - генерация осуществляется за счет переходов между энергетическими уровнями Неона, а гелий играет роль посредника, через который энергия передается атомам Неона для создания инверсной заселенности. Наиболее интенсивными являются линии с $\lambda = 0,63$ мкм. Мощность - 10 мВт. Накачка разрядом

CO_2-лазер: Энергия молекул CO_2 передается от молекул азота N_2 которые сами возбуждаются электронным ударом

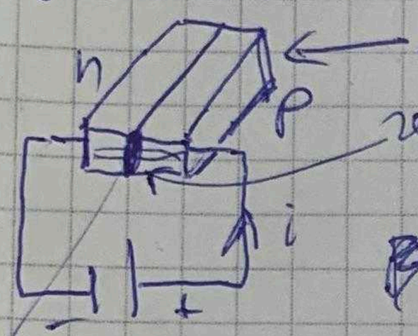
Излучение с длиной волны $\lambda = 10.6$ мкм ; до 10^4 кВт
Излучение этого лазера слабо поглощается атмосферой, поэтому такие лазеры нашли применение в задачах атмосферной оптики

Твердотельные:

YAG - импульсная накачка ан лампы - мощность 10 кВт

Полупроводниковые: активная среда полупроводниковые кристаллы

Накачка : инжекция носителей тока через p-n - переход.



← область соприкосновения проводников с разными типами проводимости
генерация света
p - дырочной
n - электронной

Мощность: 10 Вт в близней ИК-области: ($\lambda = 850$ нм)

Управляемый термоядерный синтез:

- синтез более тяжелых атомных ядер из более легких

с целью получения энергии

Реакция $d^2 + t_1^3 \longrightarrow He_2^4 + h_0^1 + \Delta W$ ← выход энергии

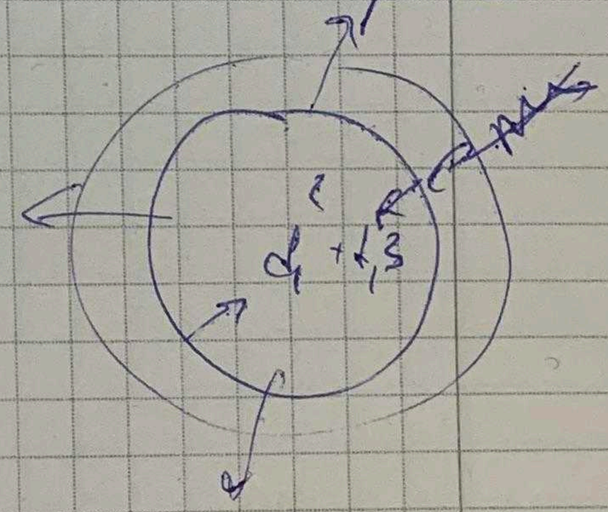
$2 \cdot 10^{-12}$ Дж

ЛТС - осуществляется путем кратковременного нагрева небольших дисков, содержащих дейтерий и тритий сверхмощными лазерными лучами

Такое облучение вызывает последовательность термоядерных взрывов

Время удержания : $\tau = 10^{-8} \div 10^{-3}$ с

Плотность твердого тела $N_n \sim 10^{30}$ м$^{-3}$



Чтобы активное вещество превратилось в генератор световых колебаний, надо осуществить обратную связь. Необходимо, чтобы часть излученного света всё время находилась в зоне активного вещества и вызывала вынужденное излучение новых и новых атомов.